ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Equazioni Differenziali Stocastiche Degeneri al Bordo

Candidato
Barbara De Cicco

Relatore
Prof. Fabio Martinelli

Anno Accademico 2010-2011

Indice

1 Introduzione

L'argomento che discuteremo nella tesi è lo studio delle equazioni differenziali stocastiche. Queste equazioni si differenziano da quelle ordinarie in quanto è presente un termine aggiuntivo aleatorio rappresentato dal moto Browniano.

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

I coefficienti di queste equazioni sono noti come drift e coefficiente di diffusione. Parlando di moto Browniano facciamo riferimento al moto casuale di particelle all'interno di un fluido, dove ogni spostamento della particella è distribuito come una normale di media nulla e varianza pari alla differenza del tempo che ha impiegato per compiere tale traiettoria. Il primo capitolo della tesi sarà quindi orientato a dare la definizione del moto Browniano e i teoremi principali che ne illustreranno le proprietà. Queste costituiranno la base degli argomenti che verranno discussi successivamente. Occupandoci di equazioni differenziali, l'obiettivo è di capire per quali condizioni sui coefficienti si può avere l'esistenza e l'unicità locale o globale della soluzione. In particolare faremo la distinzione tra soluzione debole e forte dell'equazione ed illustreremo anche un esempio che permetterà di dimostrare come l'esistenza ed unicità della soluzione debole non implica l'esistenza ed unicità della soluzione forte. Un altro argomento di cui parleremo è quello noto come problema di martingala di Strook-Varadhan, che permette di determinare una soluzione debole delle equazioni differenziali stocastiche indebolendo le ipotesi sui coefficienti a e σ. In particolare basterà la loro continuità e l'esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy associato. Successivamente studieremo le soluzioni delle equazioni differenziali stocastiche come processi di diffusione. Questo concetto sarà per noi fondamentale perchè ci permetterà di introdurre le equazioni di Kolmogorov e definire così il generatore del processo utile allo scopo di eseguire i calcoli finali della tesi. Nell'ultimo capitolo tratteremo due problemi concreti di equazioni differenziali stocastiche, che sono sorti nell'ambito della teoria cinetica dei gas. Il nostro obiettivo è quello di utilizzare il materiale a disposizione per risolvere un problema di equazioni differenziali degeneri al bordo associato a queste equazioni.

2 Elementi di base del calcolo stocastico

2.1 Processi gaussiani

Definizione 2.1 *Processo gaussiano: Dato un vettore* $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n)$ *con* ξ_i *per* $i = 1, ..., n, ..$ *variabili aleatorie, questo si dice gaussiano se* $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$*, la variabile* $\alpha_1 \xi_1 + ... + \alpha_n \xi_n \sim N(n, \sigma^2)$.

Definizione 2.2 *Processo stocastico:*

- *Un processo stocastico è una collezione di variabili aleatorie* $\{X_t\}_{t \in A}$ *dove* $A \subset \mathbb{R}$.
- *Un processo stocastico si dice gaussiano se* $\forall t_1, ..., t_n$ *il vettore* $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ *è gaussiano.*
- *Un processo stocastico si dice a incrementi stazionari se* $\forall s, t$*, la legge di* $X_t - X_s$*,* $t > s$*, dipende solo da* $t - s$.
- *Un processo stocastico incrementi indipendenti se* $\forall t_1 < t_2 < ... < t_n$*,* $(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}), (X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}), ..., (X_{t_2} - X_{t_1})$ *sono indipendenti.*

Lemma 2.3 *Sia* $\{X_t\}_{t>0}$ *un processo stocastico. Le due affermazioni seguenti sono equivalenti:*

1. $\{X_t\}$ *ha incrementi stazionari e indipendenti e* $\{X_t\} \sim N(0, t)$ $\forall t \geq 0$.
2. $\{X_t\}$ *è un processo gaussiano con* $E[X_t] = 0$ *e* $\mathrm{Cov(X_s, X_t) = s \wedge t}$.

Definizione 2.4 *Un processo stocastico* $(X_t, t \geq 0)$ *è detto a traiettorie continue se:* $P(\{\omega : \ t :\to X(t, \omega) \ \text{ continua in } t\}) = 1$.

2.2 Moto Browniano Uno-dimensionale

Definizione 2.5 *Un moto Browniano standard* W_t *è un processo stocastico che soddisfa le proprietà :*

1. $W_0 = 0$ *q.c.*
2. W_t *ha incrementi indipendenti.*

3. W_t *è un processo gaussiano.*

4. W_t *ha traiettorie continue q.c. .*

Teorema 1 *Il moto Browniano ha la proprietà di essere Holder continuo di parametro* $\alpha < 1/2$ *con probabilità 1, ovvero:*
$\Delta_n^\alpha := \sup_{|t-s|\leq\frac{1}{n};t,s\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} |W_t - W_s|n^\alpha \to 0$ *q.c. per* $\alpha < 1/2$. *Faremo vedere che per* $\alpha = 1/2$ *non è q.c. Holderiano e quindi in particolare il moto Browniano non sarà q.c. differenziabile.*

Dim: Cominciamo a ricordare la disuguaglianza di Doob che sarà utile nella dimostrazione.

Lemma 2.6 *Disuguaglianza di Doob:*
Supponiamo che $\{X_n\}_{n\leq 1}$ *siano submartingale non negative, allora:*

$$P(\max_{1\leq i\leq n} X_i \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda}E(X_n)$$

Dalla costruzione del moto Browniano, che non viene in questa tesi ripetuta, segue che:

$$\Delta_n := \sup_{t,s\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\ |t-s|\leq\frac{1}{n}} |W_t(\omega) - W_s(\omega)| \to 0 \ q.c.$$

Ora:

$$\begin{aligned} P(\Delta_n\ n^\alpha \geq \epsilon) &\leq nP(\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\frac{k-1}{n}\leq t\leq\frac{k}{n}} |W_t - W_{\frac{k-1}{n}}|n^\alpha \geq \epsilon) \\ &\leq nP(\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,1],t\leq\frac{1}{n}} W_t^{2j} \geq \frac{\epsilon^{2j}}{n^{\alpha 2j}}) \leq \frac{n^{\alpha 2j}}{\epsilon^{2j}}E(W_{t/n}^{2j}) \qquad (2.1) \\ &\leq n\frac{n^{\alpha 2j-j}}{\epsilon^{2j}}c_j \end{aligned}$$

dove $c_j = E(Z^{2j})$ in quanto vale $W_t \sim \sqrt{t}Z$ da cui $W_{1/n}^{2j} \sim (\frac{1}{n})^j Z^{2j}$. Ora al fine della convergenza si deve avere che $1 + \alpha 2j - j < 0$ da cui $j \geq \frac{1}{1-2\alpha}$. In conclusione quindi abbiamo dimostrato che $\exists$ variabile aleatoria $c(\omega)$ t.c. $|W_t(\omega) - W_s(\omega)| < c(\omega)|t-s|^\alpha$ q.c.
Osservazione:
Il moto Browniano non è Holderiano nell'origine per $\alpha = 1/2$, infatti:

$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty$ q.c. e $\liminf_{t\downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty$ q.c.. Questo perchè il moto Browniano nell'origine cambia infinitamente volte segno, ovvero per infiniti tempi si ha $\frac{W_{t_n}}{t_n} > k$ con k arbitrariamente grande.

Esempio 1 *Dimostriamo che i seguenti processi sono moti browniani, dove s è fissato mentre t varia.*

1. $X_1(t) = W_{t+s} - W_s$
2. $X_2(t) = \frac{W(ct)}{\sqrt{c}}$ $, c > 0$
3. $X_3(t) = \begin{cases} tW(\frac{1}{t}) & per\ t > 0 \\ 0 & per\ t = 0 \end{cases}$

1. $s \to W_{t+s} - W_t$ è continua dal momento che è differenza di funzioni continue. Inoltre usando il lemma (2.3) possiamo affermare che X_1 è un processo gaussiano poichè $W_{t+s} - W_s$ è la differenza di due gaussiane. Infine calcoliamo la media: $E[X_1] = E[W_{t+s} - W_s] = 0$, e calcolando la covarianza: $\mathrm{Cov(X_1(u) - X_1(v)) = Cov(W_{u+s} - W_s, W_{v+s} - W_s) = u + s - s - s + s = u}$.

2. Il processo X_2 è continuo e gaussiano. Inoltre, poichè $E[X_2(t)] = 0$ e $\mathrm{Cov(\frac{W(cs)}{\sqrt{c}}, \frac{W(ct)}{\sqrt{c}}) = \frac{1}{c}c(s \wedge t) = s}$, X_2 è un moto Browniano.

3. X_3 è processo gaussiano. Inoltre $E[X_3(t)] = 0$ e $\mathrm{Cov(sW(\frac{1}{s}), tW(\frac{1}{t})) = st(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t}) = st(\frac{1}{t}) = s}$, se $s < t$. Infine X_3 è continuo in 0 poichè ha la stessa distribuzione del moto Browniano. Infatti per la legge dei grandi numeri si ha che
$$\lim_{t\downarrow+\infty} \frac{W_t}{t} = 0\ q.c.$$
quindi X_3 è un moto Browniano.

Enunciamo ora alcuni importanti risultati per il moto Browniano.

Proposizione 2.7 *Regolarità delle traiettorie del moto Browniano*

1. $\forall t \geq 0,\ P(W(\cdot, \omega)\ è\ differenziabile\ in\ t) = 0.$
2. *Sia m la misura di Lebesgue su* $\mathbb{R}^+$*, allora* $m\{t \geq 0 : W(\cdot, \omega)\ è\ differenziabile\ in\ t\} = 0.$

Teorema 2 *Il moto Browniano non è ovunque differenziabile q.c.*

2.3 La proprietà di Markov

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che le traiettorie del moto Browniano sono continue, allora $\omega \in \Omega = C([0, \infty))$è continua, $X(t, \omega) = \omega(t)$, $\omega(0) = x \in \mathbb{R}$. La proprietà di Markov afferma che condizionatamente al valore che assume il moto Browniano ad un certo tempo, la futura evoluzione è indipendente dal passato.

Notazione: Indichiamo con P_x la legge di $x + W_t$, e con E^x la media relativa a P_x.

Definizione 2.8 *Funzioni speciali:*
Diciamo che una v.a. Y è speciale se può essere scritta nella forma:

$$Y(\omega) = \prod_{m=1}^{n} f_m(\omega(t_m))$$

dove $0 < t_1 < ... < t_n$ e $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e $f_m \to 0$ a $\pm\infty$.

Lemma 2.9 *Sia $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. limitata.*
Allora la funzione $x \to E^x(Y_{(\omega)})$ è misurabile.

Definizione 2.10 *Filtrazione:*
Definiamo una filtrazione $\{\Im_t, t \geq 0\}$ come una famiglia crescente di sotto $\sigma-algebre$ di $\Im$, ovvero $\Im_s \subseteq \Im_t$ per $s \leq t$, dove $\Im$ è la σ-algebra per la quale le funzioni $\omega \to \omega(t)$ sono misurabili per ogni t. Un'interpretazione di $\Im_t$ è che questa $\sigma - algebra$ consiste di tutti quegli eventi che sono determinati dai processi fino al tempo t. Diciamo che la filtrazione è continua se:

$$\Im_t = \bigcap_{s>t} \Im_s \ , \ \forall t \geq 0.$$

Osservazione:
Abbiamo definito $\Im_t = \bigcap_{s>t} \Im_s$, $\forall t \geq 0$ come la giusta $\sigma - algebra$. Se avessimo scelto $\Im_t^0$ come la più piccola $\sigma - algebra$ per al quale le funzioni $\omega \to \omega(s)$ sono misurabili $\forall s \leq t$, avremmo visto che questa $\sigma - algebra$ non gode della proprietà di continuità. Lo possiamo facilmente comprendere con il seguente esempio: Intuitivamente, appartengono alla $\sigma - algebra$ $\Im_t^0$ tutti

quegli eventi rispetto ai quali è possibile rispondere a qualsiasi domanda a riguardo fino al tempo t. Se però supponiamo di considerare l'evento:

$$\{ \ \omega \ t.c. \ \limsup_{h \downarrow 0} \frac{X_{t+h} - X_t}{\sqrt{h}} = \infty \} \notin \Im_t^0$$

questo proprio perchè $\Im_t^0$ non ha la proprietà di continuità, ovvero possiamo vedere gli eventi solo fino al tempo t, ma poichè stiamo facendo un limite non ci permette di guardare oltre il tempo t arbitrariamente piccolo. Quindi cambiamo la σ-algebra con $\Im_t = \bigcap_{s>t} \Im_s^0$, la quale ora è continua.

Definizione 2.11 *Traslazione temporale:*
Per $s \geq 0$, definiamo $\theta_s : \Omega \to \Omega$, $(\theta_s \omega)(t) = \omega(t+s)$. Osserviamo quindi che

$$X(t, \theta_s \omega) = (\theta_s \omega)(t) = \omega(t+s) = X(t+s, \omega) \ .$$

Teorema 3 *Proprietà di Markov:*
Supponiamo che Y sia una v.a. limitata. Allora $\forall x \in \mathbb{R}$ ed $s \geq 0$,

$$E^x[Y \circ \theta_s \ |\Im_s] = E^{X_s}[Y] \ q.c.$$

Notiamo che la variabile $Y \circ \theta_s(\omega)$ dipenderà solo dai tempi futuri s. Il condizionamento è su $\Im_s$, e la proprietà di Markov in particolare ci dice che per calcolare $Y \circ \theta_s$ ci occorre conoscere $\omega(s)$ e non occorre invece conoscere il cammino dall'origine fino ad s.

2.4 Tempi di Arresto

Ricordiamo prima di dare la definizione di tempo di arresto, come questo è definito nel caso discreto. Ovvero τ è un tempo d'arresto se $\{\tau = n\} \in \Im_n$ dove $\Im_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ $\forall n$. Questo è equivalente a dire che $\{\tau \leq n\} \in \Im_n$ $\forall n$. Ora nel caso continuo si ha spesso che l'evento $\{\tau = t\}$ ha probabilità 0. Diamo quindi la seguente definizione:

Definizione 2.12 *Tempi di Arresto:*
Una v.a. $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ è un tempo d'arresto relativo alla filtrazione $\{\Im_t\}$ se $\{\tau < t\} \subseteq \Im_t$ $\forall t \geq 0$.

Proposizione 2.13 *Supponiamo che* τ_n *sia una sequenza di tempi d'arresto. Allora lo sono anche i seguenti:* $\sup_n \tau_n$*;* $\inf_n \tau_n$*;* $\limsup_n \tau_n$*;* $\liminf_n \tau_n$*. Inoltre se* $\tau = \lim_n \tau_n$ *esiste, allora* τ *è un tempo d'arresto.*

Teorema 4 *Proprietà di Markov Forte:*
Sia τ *un tempo di arresto,* $\{Y_s\}_s$ *v.a. limitate, congiuntamente misurabili, ovvero* $(s,\omega) \to Y_s(\omega)$ *è misurabile in* $\mathbb{B}([0,\infty) \times \Im)$*. Allora*

$$E^x(Y_\tau \circ \theta_\tau | \Im_\tau) = E^{X_\tau}(Y_\tau) \text{ q.c. se } \{\tau < \infty\}$$

2.5 Martingale a tempo continuo:

Definizione 2.14 *Martingala:*
Siano $\{M_t\}_{t>0}$ *variabili aleatorie t.c.* $\forall t \geq 0$, $M_t \in L^1$ *e* $\Im_t$*-adattate. Allora diremo che* M_t *è una martingala se vale:*

$$E[M_t|\Im_s] = M_s \text{ q.c. } \forall s < t$$

M_t *è una super-martingala se* $E[M_t|\Im_s] \leq M_s$ *q.c.* $\forall s < t$
M_t *è una sub-martingala se* $E[M_t|\Im_s] \geq M_s$ *q.c.* $\forall s < t$

Lemma 2.15 *Sia* ϕ *una funzione convessa ed* $\{M_t\}_{t\geq 0}$ *una martingala, allora* $\phi(M_t)$ *è una sub-martingala.*

Dim. La dimostrazione segue dall'applicazione della disuguaglianza di Jensen:

$$E\left(\phi(M_t)\ |\Im_s\right) \geq \phi\left(E(M_t|\Im_s)\right) = \phi(M_s) \text{ q.c.}$$

Enunciamo ora il teorema di convergenza per le martingale:

Teorema 5 *Teorema di convergenza della sub-martingale*
Se $\{M_t\}_{t\geq 0}$ *è una sub-martingala continua a destra t.c*
$sup_t E|M_t| < \infty$*. Allora* $\lim_{t\to\infty} M_t$ *esiste ed è finito q.c. Se inoltre* M_t *è uniformemente integrabile, allora la convergenza si ha in* L^1*.*

Osserviamo che una martingale è uniformemente integrabile se:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t \left|E(|M_t|\ 1_{|M_t|\leq n})\right| = 0$$

Teorema 6 *Sia W_t un moto Browniano standard. Allora ognuna delle seguenti è una martingala:*

1. $M_1(t) = W(t)$;

2. $M_2(t) = W^2(t) - t$;

3. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ M(t) = e^{\alpha W(t) - \alpha^2 t/2}$.

Dim: Osserviamo che sono tutti processi adattati, ora dimostriamo che sono martingale:

1. $E(W_t|\Im_s) = E(W_s + (W_t - W_s)\ |\Im_s) = W_s$ in quanto $W_t - W_s$ è indipendente da $\Im_s$ e per definizione la media di questo incremento è nullo.

2. $E[W_t^2 - t|\Im_s] = E[W_s^2 + (W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s)|\Im_s] - t = W_s^2 + t - s - t = W_s^2 - t$.

3. $E[e^{\alpha W(t) - \alpha^2 t/2}|\Im_s] = e^{\alpha W_s - \alpha^2 t/2} E[e^{\alpha(W_t - W_s)}|\Im_s] = e^{\alpha W_s - \alpha^2 s/2}$.

Teorema 7 *Se τ è un temp d' arresto con media finita, allora:*

1. $E[W(\tau)] = 0$;

2. $E[W^2(\tau)] = E[\tau]$;

3. $E[\tau^2] \leq 4E[W^4(\tau)]$.

2.6 Variazione quadratica di una martingala continua

Esamineremo in questo paragrafo le martingale $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ continue a quadrato integrabile, ovvero $M_t \in L^2$ per ogni $t \geq 0$. Ricordiamo che $M_t \in L^2$ se $E(M_t^2) < \infty$ per ogni $t \geq 0$. Per ogni martingala continua a quadrato integrabile vale la seguente relazione:

$$E(M_t^2 - M_s^2\ |\Im_s) = E((M_t - M_s)^2\ |\Im_s)\ . \tag{2.2}$$

Definizione 2.16 *Per ogni partizione π dell'intervallo $[0,t]$, $\pi = \{0 \equiv t_0 < t_1 < ... < t_n \equiv t\}$, una martingala continua si dice a variazione limitata se*

$$\sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right) < \infty \text{ q.c.}$$

Proposizione 2.17 *Sia $M(s)$ una martingala a variazione limitata in $[0,t]$. Allora $M(s)$ è costante q.c. e $M(t) = M(0)$.*

Definizione 2.18 *Sia π una partizione dell'intervallo $[0,t]$, $\pi = \{0 \equiv t_0 < t_1 < ... < t_n \equiv t\}$. Sia $M(t)$ una martingala continua. Si definisce variazione quadratica di una martingala:*

$$S_\pi = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \ .$$

Teorema 8 *Sia $M_t = \{M_t\}_{t\geq 0}$ una martingala continua a quadrato integrabile rispetto alla filtrazione completa $\{\Im_t\}_{t\geq 0}$. Allora esiste un unico processo $A_t = \{A_t\}_{t\geq 0}$ crescente, continuo, adattato e nullo al tempo 0 tale che $M_t^2 - A_t$ è una martingala.*

Dim.
Dimostriamo per prima cosa l'unicità del processo. Supponiamo di avere due processi distinti $A_1(t)$ e $A_2(t)$, la loro differenza è: $A_1(t) - A_2(t)$. Osserviamo che $A_1(t) - A_2(t)$ è a variazione limitata in quanto sono funzioni crescenti, ed inoltre un martingala a variazione limitata è una costante nulla, da cui segue che $A_1(t) = A_2(t)$. Dimostriamo ora l'esistenza del processo. Basta dimostralo per $M(t)$ martingala con le seguenti proprietà: $EM^2(t) < \infty \ \forall t$, $M(\cdot)$ continua in t e t.c. $M(0) = 0$. Allora $M(t) = M(t) - M(0) + M(0)$ e

$$\begin{aligned} &M^2(t) = (M(t) - M(0))^2 + M^2(0) + 2(M(t) - M(0))M(0) = \\ &A(t) - M^2(0) + X(t) + 2M(0)M(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ai fini della dimostrazione dell'esistenza è conveniente assumere che $M(t)$ sia uniformemente limitata. Consideriamo dunque prima il caso in cui abbiamo la limitatezza. Notiamo che possiamo assumere che $M(0) = 0$, poichè $M(t) - M(0)$ e $[M(t) - M(0)^2] - M^2(t)$ sono entrambe martingale continue, e quindi possiamo costruire lo stesso processo $A(t)$ per $M(t)$ e $M(t) - M(0)$. Supponiamo ora che il teorema è stato dimostrato per martingale uniformemente limitate. Data $M(t)$ sia $\tau_n = n \wedge \inf\{t \leq 0 : \ |M(t)| \leq n\}$. Questi τ_n sono tempi d'arresto crescono a $+\infty$. Inoltre $M_n(t) = M(t \wedge \tau_n)$ è una martingala per ogni n, così per il risultato delle martingale uniformemente limitate, deve esistere un unico processo crescente e continuo $A_n(t)$ t.c. $A_n(0) = 0$ e $M_n^2(t) - A_n(t)$ è una martingala per ogni n. Se $m < n$, allora $M_n^2(t \wedge \tau_m) - A_n(t \wedge \tau_m)$ è una martingala. Poichè $M_n(t \wedge \tau_m) = M_m(t)$, per l'unicità si ha che $A_n(t \wedge \tau_m) = A_m(t)$, ovvero $A_n(t) = A_m(t)$ per $t \leq \tau_m$. Così possiamo definire $A(t)$ da $A(t) = A_n(t)$ per $t < \tau_n$. Osserviamo che $E[A_n(t) - A_n(\tau_n),\ t > \tau_n] = E[M_n^2(t) - M_n^2(\tau_n),\ t > \tau_n] = 0$, così $A_n(t)$ è costante per $t \leq \tau_n$. Inoltre $A_n(t) \uparrow A(t)$. Dalla disuguaglianza di Jensen si ha:

$$M_n^2(t) = M^2(t \wedge \tau_n) \leq E(M^2(t) \mid \Im_{t \wedge \tau_n}) \ ,$$

così $\{M_n^2(t),\ n \leq 1\}$ è uniformemente integrabile $\forall t$. Di conseguenza possiamo passare al limite nella proprietà di martingala:

$$E(M_n^2(t) - A_n(t) \ |\Im_s) = M_n^2(s) - A_n(s),\ s < t \ ,$$

e concludiamo che $M^2(t) - A(t)$ è una martingala.
Assumiamo ora che $|M(t)| < K$ per ogni t. Per dimostrare il teorema in questo caso, ci riconduciamo a delle considerazioni che avevamo fatto sul Moto Browniano. In questo caso il processo crescente che stiamo cercando è la variazione quadratica fino al tempo t. Sia π la partizione di $[0, \infty)$:

$$\pi = \{0 = s_0 < s_1 < s_2 < ...\}$$

con $s_k \to \infty$, definiamo il processo $A_\pi(t)$ come:

$$A_\pi(t) = \sum_{j=1}^{k} [M(s_j) - M(s_{j-1})]^2 + [M(t) - M(s_k)]^2$$

se $s_k \leq t < s_{k+1}$. Se $s < t$ prendiamo $k \leq l$ cosicchè $s_k \leq s < s_{k+1}$ e $s_l \leq t < s_{l+1}$. Allora

$$A_\pi(t) - A_\pi(s) = \sum_{j=k+1}^{l} [M(s_j) - M(s_{j-1})]^2 + [M(t) - M(s_l)]^2 - [M(s) - M(s_k)]^2 \ .$$

Segue che:

$$E[A_\pi(t) - A_\pi(s) \mid \Im_s] = E[M^2(t) - M^2(s) \mid \Im_s] \ . \tag{2.4}$$

Infatti per $k < l$ si ha:

$$E[A_\pi(t) - A_\pi(s) \mid \Im_s] = \sum_{j=k+2}^{l} E[M^2(s_j) - M^2(s_{j-1}) | \Im_s] +$$
$$E[(M(s_{k+1} - M(s_k))^2 | \Im_s] + E[M^2(t) - M^2(s_l) | \Im_s] - [M(s) - M(s_k)]^2 \ , \tag{2.5}$$

dove la somma che compare è una somma telescopica. Di conseguenza dalla 2.4 si ha:

$$M^2(t) - A_\pi(t) \tag{2.6}$$

è una martingala continua. Il processo A_π è però non crescente, per avere un processo crescente abbiamo bisogno di fare un limite sulla partizione π come la partizione diventa più fitta, e quindi la cosa principale è che

$$E[A_\pi(t) - A_{\pi'}(t)]$$

sia limitata, dove π e π' sono due partizioni che soddisfano: $t \in \pi \subset \pi'$. Se

$$\pi' = \{0 = s_0 < s_1 < s_2 < ...\}$$

sia $\xi_i = M(s_i) - M(s_j)$ l'incremento corrispondente alla partizione π'. Allora gli incrementi corrispondenti alla partizione π sono della forma:

$$\xi_1 + ... + \xi_{k_1}, \xi_{k+1} + ... + \xi_{k_2}, ...,$$

dove $0 < k_1 < k_2 < ....$ Ricordando ora che $M(t)$ è uniformemente limitata, dalla proprietà di maringala se $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_{l-1} \leq i_l$, si ha:

$$E(\xi_{i_1} + ... + \xi i_l) = E(\xi_{i_1} + ... + \xi i_l - 1 E(\xi_{i_l} | \Im_{s_{i_l - 1}})) = 0 \ . \tag{2.7}$$

Se m è definito da $s_{k_m} = t$, allora:

$$A_\pi(t) - A_{\pi'}(t) = \sum_{i=1}^{m} (\xi k_{i-1} + ... + \xi k_i)^2 - \sum_{j=1}^{k_m} \xi_j^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} \ ,$$

dove

$$T_l = \sum_{k_{l-1}<i<j<k_l} \xi_i \xi_j \ .$$

Di conseguenza

$$E[A_\pi(t) - A_{\pi'}(t)]^2 = 4 \sum_{l=1}^{m} ET_l^2 \ . \tag{2.8}$$

Usando ora la 2.7 abbiamo:

$$E[T_l^2] = \sum_{K_{l-1}<i,i'<j\leq k_l} E(\xi_i \xi_{i'} \xi_j^2) = \sum_{j=k_{l-1}+1}^{k_l} E[M(s_{j-1} - M(s_{k_{l-1}}))]^2 \xi_j^2 \ .$$

Sia ora $\delta_{M,t}(\epsilon)$ il modulo di continuità del cammino di $M(\cdot)$ sull'intervallo $[0,t]$, allora;

$$\sum_{l=1}^{m} E[T_l^2] \leq E\delta_{M,t}^2(|\pi|) \sum_{j=1}^{k_m} \xi_j^2 \leq \left(E\delta_{M,t}^4(|\pi|)\right)^{\frac{1}{2}} \left(E\left(\sum_{j=1}^{k_m} \xi_j^2\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{2.9}$$

Adesso abbiamo bisogno di limitare il secondo termine dell'equazione (2.9), per farlo usiamo la (2.7) due volte, abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} &E\left(\sum_{j=1}^{k_m} \xi_j^2\right)^2 = \sum_{j=1}^{k_m} E\xi_j^4 + 2\sum_{i=1}^{k_m} E\xi_i^2 \sum_{j=i+1}^{k_m} \xi_j^2 = \\ &\sum_{j=1}^{k_m} E\xi_j^4 + 2\sum_{i=1}^{k_m} E\xi_i^2 \left(\sum_{j=i+1}^{k_m} \xi_j\right)^2 = \\ &\sum_{j=1}^{k_m} E\xi_j^2[M(s_j) - M(s_{j-1})]^2 + 2\sum_{j=1}^{k_m} E\xi_j^2[M(s_{k_m}) - M(s_i)]^2 \leq \\ &12K^2 E \ \sum_{j=1}^{k_m} \xi_j^2 = 12K^2 E \left(\sum_{j=1}^{k_m} \xi_j\right)^2 \leq 48K^4 \ . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Unendo le equazioni (2.8), (2.9) e (2.10) otteniamo:

$$E[A_\pi(t) - A_{\pi'}(t)]^2 \leq 28K^2 \left(E\delta M, t^4(|\pi|)\right)^2 \ . \tag{2.11}$$

Poichè $M(\cdot)$ è uniformemente limitata e continua, il termine di destra tende a 0 per $|\pi| \to 0$. Adesso prendiamo π_n la partizione con $s_k = k/2^n$, e t intero positivo. Poichè $A_{\pi_n}(s) - A_{\pi'_m}(s)$ è una martingala continua per la(2.6), dalla disuguaglianza di Doob abbiamo che:

$$E(\max_{0 \le s \le t}[A_{\pi_n}(s) - A_{\pi_m}(s)])^2 \le 4E[A_{\pi_n}(t) - A_{\pi'_m}(t)]^2 \ . \tag{2.12}$$

Il termine di destra nell'ultima equazione tende a 0 per $m, n \to \infty$ per la 2.11, allora deve esistere una sotto-sequanza n_k tale che:

$$\sum_k E\left[\max_{0 \le s \le t}\left|A_{\pi_{n_{k+1}}} - A_{\pi_{n_k}}\right|\right] < \infty \ ,$$

la quale implica che

$$A(s) = \lim_{k \to \infty} A_{\pi_{n_k}}(s)$$

esiste q.c. e soddisfa tutte le proprietà richieste. In particolare $A_\pi(s)$ è un processo crescente in quanto è una funzione crescente di s su π.

2.7 Variazione Quadratica del moto Browniano

La variazione quadratica del moto Browniamo è uno strumento molto importante per lo studio degli integrali stocastici. Osserviamo che per quanto visto precedentemente, il moto Browniano ha la particolarità di avere cammini continui ma non essere q.c. differenziabile. Questo perchè il moto Browniano è una martingala continua ma non ha variazione limitata.
Sia $\{W_t\}_{t \ge 0}$ un moto Browniano. Data una partizione di tempi dell'intervallo $[0, t]$, $\pi = \{0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = t\}$, sia $|\pi| = \max_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1})$ l'ampiezza massima degli intervalli che la compongono. Sia inoltre

$$\delta_\pi = \sum_{j=1}^{n} W_{s_{j-1}}(W_{s_j} - W_{s_{j-1}})$$

definiamo infine

$$Y_\pi := \sum_{j=1}^{n} W_{s_j}(W_{s_j} - W_{s_{j-1}}) - \sum_{j=1}^{n} W_{s_{j-1}}(W_{s_j} - W_{s_{j-1}}) = \sum_{j=1}^{n}(W_{s_j} - W_{s_{j-1}})^2 \tag{2.13}$$

Y_π è una v.a. definita sullo stesso spazio di probabilità sul quale è definito il moto Browniano. Inoltre quando la partizione dell'intervallo si infittisce, ovvero il passo $|\pi| \to 0$, allora: $E[Y_\pi] = t$ e

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[\mathrm{Y}_\pi] &= \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{Var}((\mathrm{W}_{\mathrm{s_j}} - \mathrm{W}_{\mathrm{s_{j-1}}})^2) = \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{Var}((\mathrm{s_j} - \mathrm{s_{j-1}})\mathrm{Z}^2) \\ &= \sum_j (s_j - s_{j-1})^2 \leq |\pi| t \to 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

per $|\pi| \to 0$, dove $Z = \frac{W_t}{\sqrt{t}} \sim N(0,1)$.

Osservazione:

Per il teorema (8) la variazione quadratica del moto Browniano è $A(t) = t$.

Proposizione 2.19 *Supponiamo che π_n sia una sequenza di partizioni dell'intervallo* $[0,t]$.

1. $Y_{\pi_n} \to t$ *in* L^2, *ovvero* $E[Y_{\pi_n} - t]^2 \to 0$ *per* $|\pi_n| \to 0$.
2. $Y_{\pi_n} \to t$ *in probabilità.*
3. *Se* $\sum_n |\pi_n| < \infty$, *allora* $Y_{\pi_n} \to t$ *q.c. per* $n \to \infty$.

Dim:

Dimostriamo la 1) usando il risultato ottenuto precedentemente dalla variazione quadratica e la disuguaglianza di Chebyshev. Infatti:

$$P(|Y_{\pi_n} - t| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathrm{Var}(\mathrm{Y}_{\pi_\mathrm{n}}) \leq \frac{\mathrm{t}|\pi_\mathrm{n}|\mathrm{Var}(\mathrm{Z}^2)}{\epsilon^2} \to 0 \text{ per } \pi_\mathrm{n} \to 0 \ .$$

Poichè la convergenza in L^1 implica la convergenza in probabilità, dimostriamo la 3). La 3) segue dalla disuguaglianza ottenuta in 1) e dal primo lemma di Borel Cantelli:

$$P(|Y_{\pi_n} - t| \geq \epsilon) \leq \frac{t|\pi_n|\mathrm{Var}(\mathrm{Z}^2)}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon} t \mathrm{Var}(\mathrm{Z}^2) \sum_{\mathrm{n}} |\pi_\mathrm{n}| < \infty$$

Allora applicando il lemma di Borel Cantelli possiamo dire che:
$\exists n(\omega)$ *t.c.* $\forall n > n(\omega)$ $|Y_{\pi_n} - t| < \epsilon$ e allora $\limsup |Y_{\pi_n} - t| < \epsilon$ q.c.

2.8 Costruzione dell'Integrale Stocastico

In questo paragrafo introduciamo l'integrale stocastico, strumento utile ai fini dello studio delle equazioni differenziali stocastiche. Sia $Y(s)$ è un processo stocastico ed $M(s)$ è una martingala a quadrato integrabile. L'integrale stocastico è definito nel seguente modo:

$$\int_0^t Y(s,\omega)\ dM(s)$$

Un caso interessante per le applicazioni è quando $M(s) \equiv W(s)$, dove $W(s)$ moto Browniano. Per prima cosa facciamo vedere come si costruisce l'integrale stocastico per processi semplici.

Definizione 2.20 *Processi semplici:*
Sia $\{t_k\}_{k\geq 0}$ una successione crescenti di tempi, $t_k \uparrow \infty$. Siano $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ variabili aleatorie $\Im_{t_i}$-adattate e t.c. $|Y_i(\omega)| \leq K\ \forall i$. Una funzione semplice predicibile è un processo stocastico del tipo:

$$Y(t,\omega) = Y_0(\omega)1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(\omega)1_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

Per le funzioni semplici predicibili, l'integrale stocastico è:

$$M^*(t) = \int_0^t Y(s)\ dM(s) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i[M(t\wedge t_{i+1}) - M(t\wedge t_i)]\ .$$

Notiamo che questa somma è finita

Notazione: Data $M(t)$ martingala a quadrato integrabile e indichiamo con $A(t)$ il suo processo varianza scriviamo che:

$$A(t) = \langle M, M\rangle_t$$

Teorema 9 *Se $Y(t)$ è un processo semplice predicibile, allora*

$$M^*(t) = \int_0^t Y(s)dM(s)$$

è una martingala a quadrato integrabile . Il processo varianza corrispondente ad M^* è:

$$A^*(t) = \int_0^t Y^2(s)\ dA(s)\ .$$

Dove $A(s)$ è il processo varianza relativo a $M(s)$. Infine, $E \ \sup_{0\leq s\leq t}[M^*(s)]^2 \leq 4E \ A^*(t)$.

Definizione 2.21 *Sia $\mathcal{H}$ lo spazio dei processi stocastici adattati $Y(t)$, i cui cammini sono continui a sinistra e t.c. $\forall T < \infty$*

$$||Y||_T^2 := E \int_0^T Y^2(s) \ dA(s) < \infty \ .$$

Inoltre, per ogni elemento Y di $\mathcal{H}$, diciamo che $Y_n \overset{\mathcal{H}}{\longmapsto} Y$ se $||Y_n - Y||_T \to 0, \forall T > 0$.

Osservazione: Se $Y \in \mathcal{H}$, allora $Y \in \mathcal{H}$ e $||Y||_T^2 \leq K^2 E \ M^2(t)$.

Proposizione 2.22 *La classe dei processi semplici limitati sono densi in $\mathcal{H}$.*

Teorema 10 *L'integrale $M_t^* = \int_0^t Y(s,\omega) \ dM(s)$ per Y processi semplici e limitati si estende in modo continuo per tutti gli $Y \in \mathcal{H}$ in modo che sia una martingala continua a quadrato integrabile. Il processo varianza di M_t^* è dato da $\int_0^t Y^2(s,\omega) \ dA(s)$ e*

$$E\left[\int_0^t Y(s) \ dM(s)\right]^2 = E\int_0^t Y^2(s) \ dA(s) \ . \tag{2.15}$$

L'equazione (2.15) è nota come *isometia di Ito*.
Dim. Per la proposizione precedente, dato $Y \in \mathcal{H}$, esiste una successione di funzioni semplici predicibili Y_n tali che $||Y_n - Y||_T \to 0$ per ogni T. In particolare osserviamo che $\{Y_n\}$ è di Cauchy infatti
$||Y_n - Y_m||_T \leq ||Y_n - Y||_T + ||Y_m - Y||_T \to 0$ per $m, n \to \infty$. Adesso sfruttando la definizione di Y_n e Y_m per linearità si ha:

$$\begin{aligned} &E[\sup_{t\leq T}(\int_0^t Y_n(s)dM_s - \int_0^t Y_m(s)dM_s)^2] = E[\sup_{t\leq T}(\int_0^t (Y_n(s) - Y_m(s))dM_s)^2] \\ &\leq 4E[\int_0^t (Y_n(s) - Y_m(s))dM_s)^2] = 4E\int_0^t (Y_n(s) - Y_m(s))^2 dA(s) \\ &= 4||Y_n - Y_m||_T^2 \to 0 \ per \ n, m \to \infty \ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Adesso prendiamo una sottosuccessione $\{n_k\}$ t.c. $||Y_{n_k} - Y_{n_j}||_H^2 \leq \frac{1}{2^{k\wedge j}}$. In questo modo abbiamo:

$$\begin{aligned} & P\left(\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t Y_{n_k} dM(s) - \int_0^t Y_{n_j} dM(s)\right| \geq \frac{1}{2^{\frac{k\wedge j}{4}}}\right) \\ & \leq 2^{\frac{k\wedge j}{2}} E\left(\sup_{t\leq T}(\int_0^t Y_{n_k} dM(s) - \int_0^t Y_{n_j} dM(s))^2\right) \leq \frac{4}{2^{\frac{k\wedge j}{2}}}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Allora per il lemma di Borel-Cantelli la successione diventa di Cauchy e quindi converge q.c. a

$$\int_0^t Y(s) dM(s) \ . \tag{2.18}$$

Si noti come la convergenza non dipenda dalla scelta della successione $\{n_k\}$. Ora per dimostrare che (2.18) è una martingala a quadrato integrabile e che

$$\left[\int_0^t Y(s) dM(s)\right]^2 - \int_0^t Y^2(s) dA(s)$$

è una martingala. Notiamo che $Y_n \to Y$ in $\mathcal{H}$ implica che

$$\int_0^t Y_n(s) dM(s) \to \int_0^t Y(s) dM(s)$$

e

$$\int_0^t Y_n^2 dA(s) \to \int_0^t Y^2 dA(s)$$

rispettivamente la convergenza è in L^2 e L^1. Questo permette il passaggio del limite sotto il segno di aspettazione in entrambi i casi nell'applicazione della proprietà di martingala.

Esempio 2 *Sia dato l'integrale stocastico:*

$$\int_0^t W(s) \ dW(s) \ .$$

Calcoliamo la media e la varianza.

Cominciamo controllando che $W(s)$ sia in $\mathcal{H}$ quindi che

$$E\int_0^t W^2(s) \ dA(s) < \infty \ .$$

Per il teorema di Fubini,

$$E \int_0^t W^2(s)\ dA(s) = \int_0^t\ EW^2(s)\ ds = \int_0^t s\ ds = \frac{t^2}{2}$$

Calcoliamo ora la varianza:

$$E \left(\int_0^t W(s)\ dW(s) \right)^2 = E \int_0^t W^2(s)\ ds = \frac{t^2}{2}\ .$$

Ora calcoliamo la media:

$$E \int_0^t W(s)\, dW(s) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n E \left[W \left(\frac{i-1}{2^n} \right) \left(W \left(\frac{i}{2^n} \right) - W \left(\frac{i-1}{2} \right) \right) \right] = 0$$

con $i = \frac{N}{2^n}$.
Infine calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t W(s)\ dW(s) &= \lim_{n \to \infty} \left\{ 2 \sum_{i=1}^n W(t_i) \left(W(t_{i+1}) - W(t_i) \right) + W(t_n)(W(t) - W(t_n)) \right\} \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(W(t_{i+1}) - W(t_i) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(W^2(t_{i+1}) - W^2(t_i) \right) + W(t_n)(W(t) - W(t_n)) \\ &= -t + W^2(t_n) - 0 + W(t_n)(W(t) - W(t_n)) = -t + W^2(t)\ . \end{aligned} \tag{2.19}$$

In conclusione abbiamo quindi ottenuto che:

$$\int_0^t W(s)\ dW(s) = \frac{W_t^2}{2} + \frac{t}{2}\ .$$

2.9 Formula di Ito

La formula di Ito è uno strumento importante nel calcolo stocastico. Diamo di seguito il teorema della formula di Ito per martingale.

Teorema 11 *Supponiamo che f sia una funzione C^2 per la quale $E[\int_0^t [f'(M(s))]^2\ dA(s)] < \infty$ e $E[\int_0^t f''(M(s))\ dA(s)] < \infty$ Allora:*

$$f(M(t)) - f(M(0)) = \int_0^t f^{'}(M_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t f^{''}(M(s))\ dA(s)\ .$$

Esempio 3 *Calcoliamo l'integrale*

$$\int_0^t W_s \; dW_s$$

usando la formula di Ito data dal teorema, dove in questo caso $M(t) = W(t)$ *e prendiamo* $f(x) = \frac{1}{2}x^2$*, allora abbiamo che:*

$$\int_0^t W(s) \; dW_s = \int_0^t f'(W_s) \; dW_s = \frac{W_t^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^t ds = \frac{W^2(t)}{2} - \frac{t}{2} \; .$$

Teorema 12 *Date* $M_1(t)$ *ed* $M_2(t)$ *due martingale continue a quadrato integrabile, esiste un unico processo continuo* $\langle M_1, M_2 \rangle$ *a variazione limitata su intervalli di tempo finiti, t.c.*

$$M_1(t)M_2(t) - \langle M_1, M_2 \rangle$$

è una martingala.

Teorema 13 *Formula di Integrazione per Parti Se* $M_1(t)$ *ed* $M_2(t)$ *sono due martingale limitate e continue, allora*

$$M_1(t)M_2(t) = M_1(0)M_2(0) + \int_0^t M_1(s) \; dM_2(s) + \int_0^t M_2(s) \; dM_1(s) + \langle M_1, M_2 \rangle$$

2.10 Tempo Locale del moto Browniano

In questo paragrafo parleremo di un'altra quantità che è associata al moto Browniano.

Definizione 2.23 *Il Tempo Locale*
Si definisce tempo locale del moto Browniano, la misura su $\mathbb{R}$ *che associa ad ogni insieme* A *il tempo che spende il moto Browniano in un certo insieme* $A \subset \mathbb{R}$*, ossia:*

$$\int_0^t 1_A(W_s) \; ds.$$

Teorema 14 $\forall a \in \mathbb{R}^1$ $\exists$ *un processo continuo e crescente* $L_a(t)$ *che soddisfa:*

$$|W_t - a| - |a| = \int_0^t \mathrm{sgn}(\mathrm{W_s} - a) \; \mathrm{dW_s} + \mathrm{L}_a(\mathrm{t}) \tag{2.20}$$

Dim: L'equazione (2.20) è nota come Formula di Tanaka.Per comodità di notazione, nella dimostrazione consideriamo $a = 0$. Se $f(x) = |x|$ fosse una funzione C^2 allora l'equazione sarebbe esattamente la formula di Ito e $L_0(t)$ sarebbe

$$\frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\ ds\ .$$

Approssimiamo quindi la funzione f con funzioni C^2. Prendiamo $f_n(x) = \frac{1}{n}g(nx)$, dove

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(-x^4 + 6x^2 + 3) & \text{se } |x| \le 1 \\ |x| & \text{se } |x| \ge 1 \end{cases}$$

Allora le funzioni $f_n \in C^2$ e convergono uniformemente ad f. Per la formula di Ito applicata alle f_n si ha:

$$f_n(W_t) - f_n(0) = \int_0^t f_n'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}f_n''(W_s)ds$$

Per l'isometria di Ito,

$$\begin{aligned} &E\left[\int_0^t [\mathrm{sgn(W_s) - f_n'(W_s)dW_s}\right]^2 = E\int_0^t [\mathrm{sgn(W_s) - f_n'(W_s)]^2ds} \\ &= E\int_0^t [\mathrm{sgn(W_s) - f_n'(W_s)]^2 1_{|W_s|\le 1}ds} + \int_0^{\mathrm{t}} [\mathrm{sgn(W_s) - f_n'(W_s)]^2 1_{|W_s|\ge 1}ds} \\ &\le \int_0^t P(|W_s| \le \frac{1}{n})ds = \int_0^t P(|B_1| \le \frac{1}{n\sqrt{s}})ds \le \frac{C\sqrt{t}}{n}\ . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Abbiamo quindi dimostrato la convergenza in L^2, vorremo invece adesso dimostrare la convergenza q.c. quindi ripetendo i conti in maniera analoga ma per f_{n^2} otteniamo che:

$$\int_0^t f_{n^2}'(W_s)dW_s \to \int_0^t \mathrm{sgn(W_s)dW_s\ q.c.}$$

e quindi definiamo il tempo locale come:

$$L_0^t := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^t f_{n^2}''(W_s)ds$$

Osserviamo che L_0 è continuo ed è crescente poichè $f_n'' \ge 0$.

3 Equazioni differenziali stocastiche: risultati di esistenza e unicità

3.1 Definizione ed esempi

Consideriamo l'equazione differenziale stocastica:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \tag{3.1}$$

I coefficienti dell'equazione differenziale stocastica $a(t, x)$ e $\sigma(t, x)$ sono funzioni definite e continue per $t \in [0, T]$ e $x \in \mathbb{R}$ e prendono il nome rispettivamente di drift e coefficiente di diffusione. $X(t)$ è la soluzione di questa equazione e $W(t)$ è il moto Browniano. Il processo aleatorio $X(t)$ è una soluzione di (3.1) in $[0, T]$ se soddisfa le seguenti condizioni:

1. Denotando con $\Im_t$, $0 \leq t \leq T$ la più piccola $\sigma - algebra$ rispetto alla quale le variabili $X(s)$ per $s \leq t$ e $W(s)$ sono misurabili, il processo $W_t(s) = W(t+s) - W(t)$ non dipende da $\Im_t$.

2. Denotando con $H_2[0, T]$ lo spazio delle funzioni aleatorie misurabili $\varphi(t)$, tali che $\forall t \in [0, T]$ sono $\Im_t - misurabili$ e per le quali l'integrale $\int_0^T \varphi^2(t)\ dt < \infty$ *q.c.*, $|a(t, X(t))|^{1/2}$ e $\sigma(t, X(t))$ appartengono a $H_2[0, T]$;

3. Se il processo $X(t)$ è soluzione di (3.1) allora segue per la proprietà 2) che $X(0)$ è indipendente da $W(t) - W(0)$ per $t > 0$. Usando la definizione dell'integrale stocastico, possiamo esprimere l'equazione (3.1) in forma integrale come segue:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))\ ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\ dW(s) \tag{3.2}$$

Osserviamo che l'equazione (3.1) e (3.2) sono equivalenti e sono risolte per un dato $X(0)$ indipendente da $W(t)$. Inoltre se $\sigma(x, 0) = 0$, allora l'equazione (3.1) può essere considerata come un'equazione differenziale ordinaria.
Ora assumiamo che vogliamo risolvere una SDE per $\sigma(x) >$ e $a(x)$.

Usando la formula di Ito consideriamo una trasformazione dell'equazione differenziale stocastica (3.1). Sia u una funzione C^2 e definiamo $Y(t) = u(X(t))$. Applicando la formula di Ito alla funzione u abbiamo che:

$$\begin{aligned} Y(t) - Y(0) &= \int_0^t u'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t u''(X_s)d\langle X, X\rangle_s \\ &= \int_0^t [u'(X_s)a(X_s) + \frac{1}{2}u''(X_s)\sigma^2(X_s)]ds + \int_0^t u'(X_s)\sigma(X_s)dW_s \end{aligned} \tag{3.3}$$

Riscriviamo Y in forma differenziale:

$$dY_t = \tilde{a}(X_t)dt + \tilde{\sigma}(X_t)dW_t$$

dove $\tilde{\sigma} = u'(X_s)\sigma(X_s)$ e $\tilde{a}(X_t) = u'(X_s)a(X_s) + \frac{1}{2}u''(X_s)\sigma^2(X_s)$. Adesso se $a'(X_t) = 0$, allora

$$u'(X_s)a(X_s) + \frac{1}{2}u''(X_s)\sigma^2(X_s) = 0 \ .$$

Troviamo quindi che la soluzione del problema per $u'(0) = 1$ è:

$$Y(x) = u'(X) = e^{\int_0^x -\frac{2a(z)}{\sigma^2(z)}dz} \ .$$

Adesso la funzione u è C^2 e strettamente crescente, quindi esiste la sua inversa che chiamiamo v. Allora $Y(t) = u(X(t))$ da cui $v(Y(t)) = v(u(X_t)) = X_t$, quindi abbiamo che:

$$Y(t) - Y(0) = \int_0^t \tilde{\sigma}(Y_s)dW_s$$

dove

$$\tilde{\sigma}(Y_s) = u'(X_s)\sigma(X_s)$$

ma $X_s = v(Y_s)$ allora,

$$\tilde{\sigma}(Y_s) = u'(v(Y_s))\sigma(v(Y_s)) \ .$$

Vogliamo adesso risolvere la SDE quando il drift è identicamente nullo, quindi abbiamo:

$$dX(t) = \sigma(X_t)dW_t \ .$$

Vorremmo trovare qual è il processo X_t soluzione dell'equazione. A tal fine dimostriamo il seguente teorema il quale ci fornisce una forma esplicita del processo utilizzando il tempo locale del moto Browniano. Prima di enunciare il teorema abbiamo bisogno delle seguenti definizioni.
Sia m una misura su $\mathbb{R}$ t.c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|\epsilon} m(dx) < \infty \ per \ \epsilon > 0 \ .$$

Sia

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L_a(t) m(da) < \infty$$

la quale è continua q.c. e strettamente crescente. Sia $\tau(t)$ la funzione inversa di $\lambda(t)$.

Teorema 15 *Sia $c(x)$ una funzione continua e positiva in $\mathbb{R}$.*
Sia $m(dx) = c^{-1}(x)dx$ t.c. soddisfi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|\epsilon} c^{-1}(x) dx < \infty \ per \ \epsilon > 0$$

inoltre $c(x) \leq K(1 + |x|^\alpha)$, per K costante e $0 < \alpha < 2$. Allora esiste un moto Browniano standard $Z(t)$ t.c. il processo

$$X(t) = W(\tau(t))$$

soddisfi

$$X(t) = \int_0^t \sigma(X_s) dZ(s) \ .$$

Dim: Dimostriamo che τ è un tempo d'arresto. τ è un tempo di arresto se $\{\tau(t) \leq s\} \in \Im_s$. Poichè $\{\tau(t) \leq s\} = \{t \leq \lambda(s)\} \in \Im_s$ allora τ è un tempo d'arresto. Dimostriamo ora che τ ha media finita infatti:

$$E[\tau(t)] = \int_0^t P(\tau(t) \geq s) ds = \int_0^t P(t \geq \lambda(s)) ds \tag{3.4}$$

Enunciamo ora un teorema riguardante il tempo locale del quale verrà omessa la dimostrazione.

Teorema 16 *Sia φ una funzione continua e positiva su $\mathbb{R}$, allora vale:*

$$\int_0^t \varphi(W(s)) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a) L_a(t) da \quad q.c. \tag{3.5}$$

Per il teorema appena enunciato si ha:

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} L_x(s)[c(x)]^{-1}dx = \int_0^s [c(W_r)]^{-1} \\ &\geq \int_0^s \frac{dr}{K(1+|B_r|^\alpha)} \geq s^2 \left[\int_0^s K(1+|B_r|^\alpha)dr\right]^{-1} .\end{aligned} \tag{3.6}$$

Di conseguenza per $s > tK$,

$$\begin{aligned}P(\lambda(s) \leq t) &\leq P\left(\int_0^s |W_r|^\alpha dr \geq \frac{s^2 - stK}{tK}\right) \\ &\leq \frac{(tK)^k}{(s^2-stK)^k} E\left(\int_0^s |W_r|^\alpha dr\right)^k \\ &= \frac{(tKs^{\frac{\alpha}{2}+1})^k}{(s^2-stK)^k} E\left(\int_0^1 |W_r|^\alpha dr\right)^k\end{aligned} \tag{3.7}$$

per ogni $k > 0$. Se k è sufficientemente grande, garantisce che $E[\tau(t)] < \infty$. Adesso vorremmo dimostrare che $X(t) = W(\tau(t))$ e $X^2(t) - \tau(t)$ sono martingale rispetto alla filtrazione $\{\Im_{\tau(t)},\ t \geq 0\}$. Osserviamo che $\langle X, X\rangle_t = \langle W, W\rangle_{\tau(t)} = \tau(t)$ e che il tempo locale soddisfa la seguente traslazione temporale:

$$L_a(t) = L_a(s) + L_a(t+s) \circ \theta_s \; per \; s < t$$

allora anche λ e τ soddisfano:

$$\lambda(t) = \lambda(s) + \lambda(t+s) \circ \theta_{\tau(s)} \; per \; s < t$$

$$\tau(t) = \tau(s) + \tau(t+s) \circ \theta_{\tau(s)} \; per \; s < t$$

Per la proprietà di Markov forte si ha quindi che:

$$E[Y(\tau(t)) \mid \Im_{\tau(s)}] = E^{Y(\tau(s))} Y(\tau(t-s)) = Y(\tau(s)) .$$

Definiamo ora

$$Z(t) = \int_0^t \frac{1}{\sigma(X(s))} dX(s)$$

per l'isometria di Ito si ha:

$$\langle Z, Z\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{c(X(s))} d\tau(s) = \int_0^{\tau(t)} \frac{1}{c(W(u))} du .$$

Dal teorema (16) segue inoltre che

$$\langle Z, Z\rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_x(\tau(t))}{c(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} L_x(\tau(t)) m(dx) = \lambda(\tau(t)) = t \ .$$

Dunque $Z(t)$ è una martingala t.c. $Z(0) = 0$ e $\langle Z, Z\rangle_t = t$, dunque $Z(t)$ è un moto Browniano. Infine usiamo il seguente risultato per concludere la dimostrazione. Supponiamo che Y e YZ siano in H_M e

$$M^*(t) = \int_0^t Y(s) dM(s)$$

Allora

$$\int_0^t Z(s) dM^*(s) = \int_0^t Z(s) Y(s) dM(s) \ .$$

Dunque per applicare il risultato alla dimostrazione basta rinominare le variabili nel seguente modo: $M(s) = X(s)$, $Y(s) = \frac{1}{\sigma(X(s))}$ e $Z(s) = \sigma(X(s))$. Dunque

$$M^*(t) = \int_0^t \frac{1}{\sigma(s)} dX(s) = Z(t)$$

e

$$X(t) = \int_0^t \sigma(X(s)) dZ(s) \ .$$

che completa la dimostrazione.

Esempio 4 ***Equazione di Ornstein-Uhlenbeck***
Risolviamo in questo esempio la seguente equazione stocastica nel caso unidimensionale:

$$dX_t = -\alpha X_t dt + W_t \tag{3.8}$$

Vogliamo dimostrare che:

1. $X(t) = e^{-\alpha t}(X_0 + \int_0^t e^{\alpha s} dW_s), \alpha > 0$, *è soluzione dell'equazione differenziale stocastica:*

$$X_t - X_0 = \int_0^t dW_s - \alpha \int_0^t X_s ds$$

2. *Calcolare la media, la varianza e la covarianza del processo X_t;*

3. *Determinare quale sia la distribuzione asintotica del processo quando $t \to \infty$.*

Per dimostrare la 1) è sufficiente applicare la formula di Ito per parti. Sia $Y_1 = e^{-\alpha t}$ e sia $Y_2 = (X_0 + \int_0^t e^{\alpha s} dW_s)$. Osserviamo che $\langle Y_1, Y_2 \rangle = 0$ perchè Y_1 non ha parte martingala. Applicando la formula di Ito si ha:

$$\begin{aligned} dX(t) &= Y_1 dY_2 + Y_2 dY_1 = e^{-\alpha t} e^{\alpha t} dW_t + Y_2(-\alpha e^{-\alpha t})dt \\ &= dW_t + \left(X_0 + \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \right) (-\alpha e^{-\alpha t})dt = dW_t - \alpha X_t dt \end{aligned} \tag{3.9}$$

integrando otteniamo l'equazione di partenza:

$$X_t - X_0 = \int_0^t dW_s - \alpha \int_0^t X_s ds$$

che è quanto volevamo dimostrare.
Eseguiamo ora i calcoli del punto 2).

$$E[X_t] = E\left[e^{-\alpha t} X_0 + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \right] = E[X_0 e^{-\alpha t}] = e^{-\alpha t} E[X_0]$$

Calcoliamo ora la varianza:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var[X_t] = E[X_t^2] - E[X_t]^2} \\ &= \left[\left(EX_0^2 e^{-2\alpha t} + E e^{-2\alpha t} \int_0^t e^{2\alpha s} d\langle W, W \rangle_s + 2X_0 E e^{-2\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \right) \right] - e^{-2\alpha t} E[X_0]^2 \\ &= E\left[e^{-2\alpha t} X_0^2 \right] + e^{-2\alpha t} E\left[\int_0^t e^{2\alpha s} ds \right] - e^{-2\alpha t} E[X_0]^2 \\ &= e^{-2\alpha t} \mathrm{Var(X_0)} + \mathrm{e}^{-2\alpha \mathrm{t}} \frac{1}{2\alpha} (\mathrm{e}^{2\alpha \mathrm{t}} - 1) \\ &= e^{-2\alpha t} \left(\mathrm{Var(X_0)} - \frac{1}{2\alpha} \right) + \frac{1}{2\alpha} \ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Calcoliamo ora la covarianza dove ricordiamo che X_0 è indipendente da W_t.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov(X_s, X_t) = E(X_s X_t) - E(X_s)E(X_t)} = \\ &E\left[\left(e^{-\alpha s} (X_0 + \int_0^s e^{\alpha z} dW_z) \right) \left(e^{-\alpha t} (X_0 + \int_0^t e^{\alpha s} dW_s) \right) \right] - e^{-\alpha(t+s)} E[X_0]^2 \\ &= e^{-\alpha(t+s)} \mathrm{Var(X_0)} + \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{-\alpha(\mathrm{t+s})} \int_0^{\mathrm{t} \wedge \mathrm{s}} \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{u}} \mathrm{dW_u} \int_0^{\mathrm{t} \wedge \mathrm{s}} \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{u}} \mathrm{dW_u} \right] \\ &= e^{-\alpha(t+s)} \left[\mathrm{Var(X_0)} + \frac{1}{2\alpha} (\mathrm{e}^{2\alpha(\mathrm{t} \wedge \mathrm{s})} - 1) \right] \ . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dimostriamo la 3): osserviamo che per $t \to \infty$, X_t è un processo gaussiano stazionario, $X_0 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$ con $\mathrm{Cov(X_s, X_t)} = \frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha|\mathrm{t-s}|}$. Inoltre, la convergenza ottenuta è una convergenza in legge.

3.2 Soluzioni Forti

Dato $(\Omega, \Im, P)$ spazio di probabilità e $W = \{W_t, \Im_t, 0 \leq t < \infty\}, W(0) = 0$ moto Browniano standard. Ricordiamo che $\Im_t = \sigma(\cap_{s \geq t} \Im_s)$ è la filtrazione. Consideriamo l'equazione differenziale stocastica

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \tag{3.12}$$

dove $a(t, x)), \sigma(t, x)$ sono definite e continue per $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq t < \infty$;
$X = \{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ processo stocastico continuo soluzione dell'equazione (3.12).

Definizione 3.1 *Dato uno spazio di probabilità* $(\Omega, \Im, P)$*, un moto Browniano* W_t *e un dato iniziale* x*, si definisce soluzione forte dell'equazione (3.12) un processo* $X = \{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ *continuo e con le seguenti proprietà:*

1. X *è adattato rispetto alla filtrazione* $\Im_t$*;*
2. $P(X_0 = x) = 1$*;*
3. $P(\int_0^t \{|a(s, X_s)| + \sigma^2(s, X_s)\} ds) = 1$*,* $\forall 0 \leq t < \infty$*;*
4. *La scrittura integrale dell'equazione (3.12) è q.c.*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW(s) \ , \ 0 \leq t < \infty \ .$$

Inoltre se X *e* $\tilde{X}$ *sono due soluzioni dell'equazione (3.12) relative al moto Browniano* W *con dato iniziale* x*, allora*

$$P(X_t = \tilde{X}_t, 0 \leq t < \infty) = 1 \ .$$

e diciamo che sotto queste condizioni c'è unicità forte della soluzione.

Questo vuol dire che se esistono due soluzioni distinte per lo stesso problema (3.12) con lo stesso dato iniziale allora queste coincidono con probabilità 1 vale a dire traiettoria per traiettoria.

3.3 Teoremi di esistenza ed unicità

In questo paragrafo ci occuperemo dei teoremi di esistenza e unicità della soluzione per le equazioni differenziali stocastiche. In particolare vedremo quali sono le ipotesi da fare sui coefficienti per dire se esiste la soluzione forte del problema.

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \tag{3.13}$$

i cui coefficienti $a(t, x)$ e $\sigma(x, t)$ sono definite e misurabili per $t \in [0, T]$ e $x \in \mathbb{R}$. Proveremo l'esistenza e unicità della soluzione forte per date condizioni iniziali. In particolare sarà sufficiente per dimostrare l'esistenza e unicità che i coefficienti soddisfino le condizioni di Lipschitz. In particolare nel dettaglio i seguenti teoremi riguardano:

1. Teorema (17): L'esistenza ed unicità della soluzione forte nel caso in cui il drift soddisfa la condizione di Lipschitz e il coefficiente di diffusione $\sigma = 1$.
2. Teorema (18): L' unicità della soluzione forte nel caso in cui il drift e il coefficiente di diffusione sono uniformemente Lipschitziani e con crescita lineare.
3. Teorema (19): L'esistenza ed unicità della soluzione forte nel caso in cui il drift e il coefficiente di diffusione soddisfano la condizione di Lipschitz e con crescita lineare.
4. Teorema (20): L'esistenza ed unicità della soluzione forte nel caso in cui il drift soddisfa la condizione di Lipschitz mentre il coefficiente di diffusione è Holderiano.

Enunciamo il seguente teorema che verrà richiamato spesso nel capitolo.

Lemma 3.2 *Lemma di Gronwall:*
Sia φ una funzione $C([0, T])$ t.c.

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t g(s)\varphi(s)ds, \;\; t \in [0, T]$$

dove $c \in \mathbb{R}$ e g una funzione continua e non negativa. Allora si ha:

$$\varphi(t) \leq c e^{\int_0^t g(s)ds}, \;\; t \in [0, T] \; .$$

Dim.
Poniamo
$$F(t) = c + \int_0^t g(s)\varphi(s)ds$$
Per ipotesi $\varphi \le F$ poichè g è una funzione non negativa e si ha:
$$\frac{d}{dt}(e^{\int_0^t g(s)ds}G(t)) = e^{\int_0^t g(s)ds}(-g(t)G(t) + g(t)\varphi(t)) \le 0 \ .$$
Integrando otteniamo che:
$$e^{\int_0^t g(s)ds}G(t) \le c$$
e quindi
$$\varphi(t) \le G(t) \le ce^{\int_0^t g(s)ds} \ .$$
che è quanto volevamo dimostrare. Il risultato di questo teorema sarà utile nei teoremi che seguono.

Teorema 17 *Supponiamo di avere la seguente equazione differenziale stocastica nel caso unidimensionale:*
$$dX_t = a(t, X_t)dt + dW_t$$
con dato iniziale $X_0 = x$*, la funzione* $a(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *t.c.* $|a(t,x) - a(t,y)| \le L|x-y|$*, e* $\sigma = 1$*. Allora esiste ed è unica la soluzione forte del problema.*

Osservazione:
Osserviamo che la restrizione che facciamo sul drift è piuttosto forte in quanto senza questa ipotesi la soluzione potrebbe raggiungere valori infiniti in un tempo finito e in questo caso si dice che c'è un tempo di esplosione della soluzione. Vediamolo meglio con il seguente esempio cosa significa prima di passare alla dimostrazione del teorema. Consideriamo per esempio l'equazione:
$$X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 ds$$
la cui soluzione è $X_t = \frac{1}{1-t}$ che esplode per $t \uparrow 1$. Ovvero in un tempo finito la soluzione esplode. Quindi al fine di ottenere l'esistenza globale della soluzione, bisogna imporre condizioni più forti sui coefficienti. Torniamo ora

alla dimostrazione del teorema:

Dim:

Costruiamo la soluzione per approssimazioni successive:

$$\begin{aligned}
&X_0(t) = X(0) = x \\
&X_1(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X_s^0)ds + W_t \\
&\vdots \\
&X_n(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X_s^{n-1})ds + dW_t \\
&X_{n+1}(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X_s^n)ds + dW_t
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Quello che vogliamo dimostrare è che per $n \to \infty$, X_t^n converga alla soluzione. Definiamo ora $D_t^{(n)} := \max_{0 \le s \le t} |X_s^{n+1} - X_s^n|$, osserviamo che $D_t^0 \le C(x, t, \max_s W_s)$, allora $D_n^{(n)} \le \frac{L^n s^n}{n!} C$, $\forall n$ e $\forall s \le t$. Se dimostriamo che questo è vero, allora $D_n \to 0$ per $n \to \infty$ e avremo la convergenza voluta. Lo dimostriamo per induzione:

$$\begin{aligned}
&\left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right| \le \int_0^t \left| a(s, X_s^n) - a(s, X_s^{n-1}) \right| ds \le L \int_0^t \left| X_s^{(n)} - X_s^{n-1} \right| ds \\
&\le L \int_0^t D_s^{(n-1)} ds \le L \int_0^t C \frac{L^{n-1} s^{n-1}}{(n-1)!} ds = C \frac{L^n t^n}{n!} \to 0 \; per \; n \to \infty \; .
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Questo termina la dimostrazione dell'induzione. Adesso per costruzione possiamo scrivere che:

$$X_s^{(n)} = x + \sum_{j=1}^{n} \left(X_s^{(j)} - X_s^{(j-1)} \right)$$

ed inoltre sappiamo che :

$$\sup_{0 \le s \le t} \left| X_s^j - X_s^{j-1} \right| \le C \frac{L^j s^j}{j!} < \infty$$

quindi quanto n cresce la seguente serie converge

$$\sum_{j=1}^{n} C \frac{L^j s^j}{j!} < \infty$$

da cui otteniamo che $X_s^{(n)} \to X_s$ per $n \to \infty$, $\forall s \leq t$, dove X_s è soluzione della SDE. Per controllare facciamo la prova:

$$X_t - x = \int_0^t a(X_s)ds + W_t$$

Passiamo ora al limite a destra e a sinistra:

$$\lim_{n\to\infty}(X_t^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} x + \left[\int_0^t a_s^{(n-1)}(X_s)ds + W_t\right]$$

ed otteniamo che:

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s)ds + W_t$$

dove abbiamo potuto potare il limite sotto il segno di integrale a destra per la BDD. [1]

Dimostriamo ora l'unicità della soluzione. Supponiamo che X_t ed $\tilde{X}_t$ siano entrambe soluzioni per la stessa equazione differenziale stocastica, con stesso dato iniziale:

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s)ds + W_t$$

$$\tilde{X}_t = x + \int_0^t a(\tilde{X}_s)ds + W_t$$

Per dimostrare che queste sono uguali, facciamo vedere che la loro differenza è 0.

$$\left|X_t - \tilde{X}_t\right| \leq \int_0^t \left|a(X_s) - a(\tilde{X}_s)\right| ds \leq L \int_0^t |X_s - \tilde{X}_s| ds \tag{3.16}$$

Ora applichiamo il lemma di Gronwall e denominando con $\varphi(t) = |X_s - \tilde{X}_s|$, si deve avere necessariamente che $\varphi = 0$ e quindi le due soluzioni devono coincidere q.c.

[1] BDD: Supponiamo $\{X_n\}$ variabili aleatorie t.c. $X_n \to X$ q.c. Se esiste una costante finita K t.c. $|X_n(\omega)| \leq K$, $\forall n, \omega$ allora $E|X_n - X| \to 0$ per $n \to \infty$.

Teorema 18 *Supponiamo che i coefficienti $a(t,x)$ e $\sigma(t,x)$ siano continui in entrambe le variabili. Supponiamo inoltre che soddisfino:*

1. *per qualche $k > 0$*

$$|a(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq k^2|1 + x^2|$$

2. *$\forall n$ esiste L_n t.c.*

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L_n|x - y|$$

con $|x| \leq n$ e $|y| \leq n$. Allora si ha unicità in senso forte della soluzione. (Quindi vol dire che se prese due soluzioni distinte dello stesso problema queste sono indistinguibili).

Dim.
Supponiamo che X e $\tilde{X}$ siano entrambe due soluzioni forti dell'equazione (3.12) definite $\forall t \geq 0$, relative allo stesso moto Browniano W e con stesso dato iniziale x sullo stesso spazio $(\Omega, \Im, P)$. Definiamo due tempi di arresto $\tau_n := \inf\{t \geq 0; |X_t| \geq n\}$ e $\tilde{\tau}_n := \inf\{t \geq 0; |\tilde{X}_t| \geq n\}$ per $n \geq 1$. Poniamo $S_n := \tau_n \wedge \tilde{\tau}_n$. Chiaramente $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, q.c. e

$$X_{t\wedge S_n} - \tilde{X}_{t\wedge S_n} = \int_0^{t\wedge S_n} \{a(u,X_u) - a(u,\tilde{X}_u)\}du + \int_0^{t\wedge S_n} \{\sigma(u,X_u) - \sigma(u,\tilde{X}_u)\}dW_u$$

Ora usando che $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, la disuguaglianza di Holder e l'isometria di Ito, otteniamo:

$$\begin{aligned}
&E\left|X_{t\wedge S_n} - \tilde{X}_{t\wedge S_n}\right|^2 \\
&\leq 4E\left|\int_0^{t\wedge S_n} (a(u,X_u) - a(u,\tilde{X}_u))du\right|^2 + 4E\left[\int_0^{t\wedge S_n} (\sigma(u,X_u) - \sigma(u,\tilde{X}_u))dW_u\right]^2 \\
&\leq 4tE\int_0^{t\wedge S_n} \left|a(u,X_u) - a(u,\tilde{X}_u)\right|^2 du + 4E\int_0^{t\wedge S_n} \left|\sigma(u,X_u) - \sigma(u,\tilde{X}_u)\right|^2 du \\
&\leq 4(T+1)L_n^2 \int_0^t E\ |X_{u\wedge S_n} - \tilde{X}_{u\wedge S_n}|^2 du\ .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Applichiamo adesso il lemma di Gronwall e poniamo
$\varphi(t) = E[|X_{u\wedge S_n} - \tilde{X}_{u\wedge S_n}|^2]$ si ha che $E\ |X_{u\wedge S_n} - \tilde{X}_{u\wedge S_n}|^2 = 0$, di conseguenza si deve avere che $X = \tilde{X}$ q.c. allora

$$P(X_{t\wedge S_n} = \tilde{X}_{t\wedge S_n}, t \in [0,T]) = 1\ .$$

Abbiamo dimostrato quindi che i due processi sono indistinguibili e passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo che:

$$P(X_t = \tilde{X}_t, t \in [0,T]) = 1\ .$$

Per dimostrare l'esistenza della soluzione, basterà generalizzare il procedimento delle approssimazioni successive come nella dimostrazione del teorema (17) per $\sigma > 0$.

Teorema 19 *Data un' equazione differenziale stocastica (3.13), se le seguenti condizioni sono soddisfatte:*

1. *La funzione $a(t, X(t))$ e $\sigma(t, X(t))$ sono definite per $t \in [0,T]$ e $x \in \mathbb{R}$ e sono misurabili nei loro argomenti;*
2. *Esiste una costante K t.c. per $t \in [0,T]$ e $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ vale:*
   - $|a(t,x) - a(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$
   - $|a(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$
3. *$X(0)$ è indipendente da $W(t)$ e $E[X(0)^2] < \infty$*

Allora esiste una soluzione nell'intervallo $[0,T]$ dell'equazione (3.13) che soddisfa le seguenti condizioni:

1. *$X(t)$ è continua con probabilità 1 e $X(t) = X(0)$ per $t = 0$.*
2. $\sup_{0\leq t\leq T} E[X(t)^2] < \infty$

Inoltre se $X_1(t)$ e $X_2(t)$ sono due soluzioni della stessa equazione (3.13) e soddisfano le proprietà 1) e 2) allora

$$P\{\sup_{0\leq t\leq T} |X_1(t) - X_2(t)| = 0\} = 1\ .$$

Dim:
Dimostriamo per prima cosa l'unicità della soluzione. Siano $X_1(t)$ e $X_2(t)$ due soluzioni distinte t.c.:
$X_i(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X_i(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s)$, $i = 1, 2$
allora

$$\begin{aligned}
&E|X_1(t) - X_2(t)|^2 \\
&= E\left[\left|\int_0^t [a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s))]ds + \int_0^t [\sigma(s, X_1(s)) - \sigma(s, X_2(s))]dW(s)\right|\right]^2 \\
&\leq 4E\left[\int_0^t |a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s))|\, ds\right]^2 \\
&+ 4E\left[\int_0^t |\sigma(s, X_1(s)) - \sigma(s, X_2(s))|dW(s)\right]^2 \\
&\leq 4tE\left[\int_0^t |a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s))|^2 ds\right] \\
&+ 4E\left[\int_0^t |\sigma(s, X_1(s)) - \sigma(s, X_2(s))|^2 ds\right] \\
&\leq (4T + 1)E\int_0^t |(a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s)))|^2 + |\sigma(s, X_1(s)) - \sigma(s, X_2(s))|^2 ds \\
&\leq (4T + 1)k^2 E\int_0^t |X_1(s) - X_2(s)|^2 ds \\
&= (4T + 1)k^2 \int_0^t E|X_1(s) - X_2(s)|^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Abbiamo quindi ottenuto che :

$$E|X_1(t) - X_2(t)|^2 \leq (4T + 1)k^2 E\int_0^t E|X_1(s) - X_2(s)|^2 ds$$

ed applicando il lemma di Gronwall si deve avere necessariamente che $E|X_1(s) - X_2(s)| = 0$ e quindi $P(X_1 = X_2) = 1, \forall t \in [0, T]$. Ora vorremmo portare l'operatore $\forall t$ all'interno della probabilità, vorremmo poter dire che

$$P(X_1(s) = X_2(s)\ \forall s \in [0, T] \cap \mathbb{Q}) = 1\ .$$

A questo scopo dimostriamo il complementare e vorremmo quindi che:

$$P(\exists s \in [0, T] \cap \mathbb{Q}\ t.c.\ X_1(s) \neq X_2(s)) = 0$$

Ora $[0,T]\cap\mathbb{Q}$ è un insieme numerabile allora:

$$P(\exists s\in[0,T]\cap\mathbb{Q}\ t.c.\ X_1(s)\neq X_2(s))\leq\sum_{t\in[0,T]\cap\mathbb{Q}}P(X_1(s)\neq X_2(s))=0$$

che è il complementare, per quanto dimostrato prima, di $P(X_1=X_2)=1$. Dimostriamo adesso l'esistenza della soluzione di (3.13) che soddisfa le condizioni 1) e 2).
Costruiamo la soluzione per approssimazioni successive:

$$X_0(t)=X(0)$$

$$X_1(t)=X_0+\int_0^t a(s,X_0(s))ds+\int_0^t\sigma(s,X_0(s))dW(s)$$

iterando,

$$X_n(t)=X(0)+\int_0^t a(s,X_{n-1}(s))ds+\int_0^t\sigma(s,X_{n-1}(s))dW(s)$$

Adesso con l'aiuto della stima usata nella dimostrazione dell'unicità dimostriamo che:

$$\begin{aligned}&E[X_{n+1}(t)-X_n(t)]^2\\&=E\left[\int_0^t a(s,X_n(s)-a(s,X_{n-1}(s)))ds+\int_0^t\sigma(s,X_n(s))-\sigma(s,X_{n-1}(s))dW(s)\right]^2\\&\leq L\int_0^t E|X_n(s)-X_{n-1}(s)|ds\ .\end{aligned}\tag{3.19}$$

Dove $L=2(T+1)k^2$ Iterando la disuguaglianza otteniamo che :

$$E[X_{n+1}(t)-X_n(t)]^2\leq L^nE\left[\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}E|X_1(s)-X_0(s)|^2ds\right].$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned}&E|X_1(s)-X_0(s)|^2=E\left[\int_0^t a(s,X(0))ds\right]^2+E\int_0^t\sigma^2(s,X(0))ds\\&\leq LTk^2(1+E[X^2(0)])\end{aligned}\tag{3.20}$$

Deve quindi esistere una costante C t.c.
$E[X_{n+1}(t)-X_n(t)]^2 \leq C\frac{(LT)^n}{n!}$
Osserviamo inoltre che:

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}|X_{n+1}(t)-X_n(t)| \\
&\leq \int_0^T a(s,X_n(s))-a(s,X_{n-1}(s))ds \\
&+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^1(\sigma(s,X_{n+1}(s))-\sigma(s,X_n(s)))dW(s)\right|
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Conseguentemente usando la disuguaglianza di Cauchy, e la condizione di Lipschitz, possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned}
&E[\sup_{0\leq t\leq T}|X_{n+1}(t)-X_n(t)|^2] \\
&\leq 2T\int_0^t E[k^2|X_n(t)-X_{n-1}(t)|^2]ds+8k^2\int_0^1 E[|X_n(t)-X_{n-1}(t)|^2]ds \\
&\leq \frac{k^2(2T+8)TL^{n-1}T^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Dalla convergenza di:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty}P\{\sup_{0\leq t\leq T}|X_n(t)-X_{n-1}(t)|>\frac{1}{n^2}\} \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{k^2(2T+8)TL^{n-1}T^{n-1}}{(n-1)!}n^4<\infty
\end{aligned} \tag{3.23}$$

segue l'uniforme convergenza:

$$X(0)+\sum_{n=0}^{+\infty}[X_{n+1}(t)-X_n(t)]<\infty \; q.c.$$

Inoltre la continuità di $X(t)$ segue dal fatto che è uguale q.c. al limite di un processo continuo. Passando al limite per $n\to+\infty$ il processo $X_n(t)$ converge a $X(t)$ soluzione dell'equazione (3.13).

Teorema 20 *Supponiamo che i coefficienti dell'equazione differenziale stocastica*

$$dX_t=b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dW_t$$

soddisfino le seguenti:

1. $|a(t,x) - a(t,y)| \leq K|x-y|$;

2. $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq h(|x-y|)$;

per $\forall 0 \leq t < \infty$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, K *costante positiva e* $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *funzione strettamente crescente con* $h(0) = 0$ *ed inoltre t.c.*

$$\int_0^{\epsilon} \frac{1}{h^2(u)} du = \infty \ , \ \forall \epsilon > 0$$

Allora sotto queste ipotesi in $d = 1$ *ancora vale l'unicità forte della soluzione dell'equazione (3.13).*

Dim.
Per come è definita la funzione h, deve esistere una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ decrescente t.c. $a_0 = 1$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e

$$\int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{1}{h^2(u)} du = n \ , \forall n \geq 1 \ .$$

Ora $\forall n \geq 1$ deve esistere una funzione ρ_n continua su $\mathbb{R}$ a supporto in (a_n, a_{n-1}) t.c. $0 \leq \rho_n \leq \frac{2}{nh^2(x)}$, $\forall x > 0$ e

$$\int_{a_n}^{a_{n-1}} \rho_n(x) dx = 1 \ .$$

Allora la funzione $\psi_n(x) = \int_0^{|x|} \int_0^y \rho_n(u) du \ dy$, $x \in \mathbb{R}$ è t.c.

- è una funzione pari e C^2;
- $|\psi'(x)| \leq 1$;
- $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = |x|$;
- $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è non decrescente .

Ora dimostriamo l'unicità: siano $X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ due soluzioni distinte di (3.13) t.c. $X_0^{(1)} = X_0^{(2)}$ dimostriamo che :

$$E \int_0^t \left|\sigma(s, X_s^{1,2})\right|^2 < \infty$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_t &= X_t^{(1)} - X_t^{(2)} \\
&= \int_0^t \left\{ a(s, X_s^{(1)}) - a(s, X_s^{(2)}) \right\} ds + \int_0^t \left\{ \sigma(s, x_s^{(1)}) - \sigma(s, x_s^{(2)}) \right\} dW(s)
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Applicando la formula di Ito alla funzione $\psi(\Delta_t)$ otteniamo che:

$$
\begin{aligned}
\psi_n(\Delta_t) &= \int_0^t \psi^{'}(\Delta(s))[a(s, X_s^{(1)}) - a(s, X_s^{(2)})]ds \\
&+ \int_0^t \psi^{'}(\Delta(s))[\sigma(s, X_s^{(1)}) - \sigma(s, X_s^{(2)})]dW(s) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \psi^{''}(\Delta(s))[\sigma(s, X_s^{(1)}) - \sigma(s, X_s^{(2)})]^2 ds
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Calcoliamo ora la media dell'equazione (3.25) otteniamo che:

$$
E \int_0^t \psi^{''}(\Delta(s)) h^2(|\Delta(s)|)ds \leq \frac{2t}{n}
$$

quindi è limitata dall'alto, allora

$$
\begin{aligned}
E\psi_n(\Delta_t) &\leq E\psi^{'}(\Delta(s))[b(s, X_s^{(1)}) - b(s, X_s^{(2)})]ds + \frac{t}{n} \\
&\leq k \int_0^t E|\Delta_s|ds + \frac{t}{n}
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

applicando il lemma di Gronwall deve essere che $E|\Delta_s| = 0$ e quindi $X_t^{(1)} = X_t^{(2)}$ q.c. che ne conclude la dimostrazione.

3.4 Soluzioni Deboli

In questo paragrafo proviamo l'esistenza ed unicità della soluzione debole dell'equazione differenziale stocastica (3.12) a coefficienti a, σ continui e limitati. Una soluzione debole è una soluzione di (3.12) in cui i coefficienti sono noti ma non è specificato il moto Browniano rispetto al quale è data l'equazione. Quindi mentre nella soluzione forte il moto Browniano, lo spazio di probabilità $(\Omega, \Im, P)$ e la filtrazione $\{\Im_t\}_{t\geq 0}$ sono dati a priori, e il dato iniziale x è una v.a. $\Im_0$-misurabile t.c. $X_0 = x$ q.c. , nella soluzione debole il moto Browniano e lo spazio di probabilità sul quale è definito non sono assegnati e fanno parte della soluzione. Inoltre al dato iniziale è assegnata una distribuzione iniziale $X_0 \sim \mu$ e se la soluzione è definita su $(\Omega, \Im, P)$ allora

$$P(X_0 \in A) = \mu(A), \ A \in B(\mathbb{R}) \ .$$

Definizione 3.3 *Una soluzione debole dell'equazione (3.12) è una tripla:*

$$(X, W), (\Omega, \Im, P), \{\Im_t\}_t \tag{3.27}$$

dove:

1. $(\Omega, \Im, P)$ *è lo spazio di probabilità e* $\{\Im_t\}_t$ *è una filtrazione di* $\Im$*;*

2. $X = \{X_t; \Im_t; 0 \leq t < \infty\}$ *è un processo continuo e adattato in* $\mathbb{R}$*;* $W = \{W_t, \Im_t : 0 \leq t < \infty\}$ *moto Browniano standard. Inoltre valgono le proprietà 3) e 4) della soluzione forte (3.1) ed inoltre :*

3. $P\left[\int_0^t |b(s, X_s)| + \sigma^2(s, X_s) ds < \infty\right] = 1$*;*

4. $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW(s) \quad .$

Definizione 3.4 *Supponiamo che comunque prese* $(X, W), (\Omega, \Im, P), \{\Im_t\}$ *e* $(\tilde{X}, W), (\Omega, \Im, P), \{\tilde{\Im}_t\}$ *due soluzioni deboli della SDE (3.12) con lo stesso moto Browniano* W *e stesso spazio di probabilità* $(\Omega, \Im, P)$ *e con dato iniziale uguale q.c., i due processi sono indistinguibili ovvero*
$P(X_t = \tilde{X}_t : \forall\ 0 \leq t < \infty) = 1$*, allora diciamo che vale l'unicità traiettoria per traiettoria.*

Definizione 3.5 *La misura di probabilità:* $\mu(A) := P(x \in A)$ *con* $A \in B(\mathbb{R})$ *è detta distribuzione iniziale della soluzione. Diciamo che c'è unicità in senso di legge di probabilità per la soluzione debole dell'equazione (3.12) se prese comunque due soluzioni* $X, \tilde{X}$*,con la stessa distribuzione iniziale, i due processi* $X, \tilde{X}$ *hanno la stessa legge.*

Esempio 5 ***Equazione di Tanaka***

Questo è il caso in cui una SDE è risolubile in senso debole ma non c'è esistenza forte della soluzione. Si trova che la soluzione è unica in legge ma non c'è unicità traiettoria per traiettoria. Questo esempio prova che l'unicità debole della soluzione per una SDE non implica quella forte. Consideriamo la SDE unidimensionale:

$$X_t = \int_0^t \mathrm{sgn(X_s)dW_s} \tag{3.28}$$

dove:

$$\sigma(x) = \mathrm{sgn(x)} := \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

Osserviamo che il coefficiente di diffusione non soddisfa la condizione di Lipschitz e quindi non è possibile applicare i teoremi di esistenza ed unicità della soluzione forte.

Se $(X, W), (\Omega, \Im, P), \{\Im_t\}$ è una soluzione debole, allora X_t è una martingala continua a quadrato integrabile con processo varianza:

$$< X, X >_t = \int_0^t \mathrm{sgn^2(X_s)ds = t}$$

di conseguenza X_t è un moto Browniano standard e dunque vale l'unicità della soluzione in senso di legge di probabilità. D'altra parte anche $(-X, W), (\Omega, \Im, P), \{\Im_t\}$ è una soluzione debole e quindi non c'è unicità in senso forte vale a dire traiettoria per traiettoria. Ora dimostriamo l'esistenza di una soluzione debole. Consideriamo un moto Browniano standard W sullo spazio di probabilità $(\Omega, \Im, P, \Im_t)$ e sia:

$$B_t = \int_0^t \mathrm{sgn(W_s)dW_s}$$

allora per le stesse considerazioni fatte prima B_t è un moto Browniano standard ed inoltre vale

$$dW_t = \mathrm{(sgn(W_t))^2dW_t = sgn(W_t)dB_t}$$

quindi possiamo dire che W è soluzione relativa al moto Browniano B_t.

Dimostriamo infine che l'equazione (3.28) non ammette una soluzione forte. Lo dimostriamo per assurdo: Sia X la soluzione relativa ad un moto Browniano W definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \Im, P, \Im_t^W)$ dove $\Im_t^W$ è la filtrazione standard per W, quindi dotata della proprietà di continuità. Allora vale:

$$dW_t = \mathrm{(sgn(X_t))^2dW_t = sgn(X_t)dX_t} \tag{3.30}$$

Dalla formula di Tanaka vale:

$$|X_t| = \int_0^t \mathrm{sgn(X_s)dX_s + L_0^X(t)}$$

ed inoltre vale:

$$L_0^X(t) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\epsilon} \left|\{s \in [0,T] t.c. |X_s| \le \epsilon\}\right|$$

dove $L_0^X(t)$ è tempo locale di X in 0. Adesso dalla (3.30) e dalla (3.28) otteniamo la seguente equazione:

$$|X_t| = \int_0^t dW_t + L_0^X(t)$$

da cui

$$|X_t| - L_0^X(t) = W_t$$

di conseguenza W_t è il processo adattato alla filtrazione $\Im_t^{|X|}$ di $|X_t|$. Ma per definizione X è adattato alla filtrazione $\Im_t^W$ ed allora abbiamo la seguente inclusione:

$$\Im_t^X \subseteq \Im_t^{|X|}$$

e tale inclusione è assurda, da cui otteniamo che non esiste una soluzione forte.

4 Problema di martingala

4.1 Il Problema di Martingala di Strook e Varadhan

Fino ad adesso abbiamo visto che un'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{4.1}$$

ha un'unica soluzione forte se i coefficienti $a(t, X_t)$ e $\sigma(t, X_t)$ soddisfano la condizione di Lipschitz. Il problema di martingala dà condizioni più generali suoi coefficienti e permette di trovare una soluzione debole per la (4.1).
Strook e Varadhan hanno formulato come cercare la legge di un processo di diffusione dati il drift e il coefficiente di diffusione in termini di problema di martingala. Questo è equivalente a trovare una soluzione debole dell'equazione (4.1) collegata, ma non la coinvolge direttamente.
Nota: Le dimostrazioni successive verranno fatte per semplicità di calcolo in dimensione $d = 1$.
Diamo di seguito la definizione di martingala locale che richiameremo frequentemente nei teoremi che seguono.

Definizione 4.1 *Martingala locale*
Un processo $\{M_t\}_{t\geq 0}$*,* $\Im_t$*-adattata è una martingala locale se esiste una sequenza crescente* $\{\tau_n\}$ *di tempi di arresto* $\Im_t$*-adattati t.c.* $\lim_{n\to\infty} \tau_n = T$ *q.c. e* $\forall n \in \mathbb{N}$ *il processo stocastico* $M_{t\wedge\tau_n}$ *è una martingala* $\Im_t$*-adattata. Denotiamo con* $\mathcal{M}_{c-loc}$ *lo spazio delle martingale locali continue t.c* $M_0 = 0$.

Definizione 4.2 *Supponiamo che* $(X, W), (\Omega, \Im, P), \{\Im_t\}$ *sia una soluzione debole di* (4.1)*,* $\forall t \geq 0$ *si definisce operatore caratteristico:*

$$(A_t f)(x) := a(t, x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{4.2}$$

dove $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposizione 4.3 *Per ogni funzione continua* $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R})$*, il processo*

$$M_t^f := f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s} + A_s f\right)(s, X_s)ds \tag{4.3}$$

è una martingala locale continua. Se poi è data una funzione $g(t,x) : [0,\infty)\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $g \in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R})$*, allora*

$$< M^f, M^g >= \int_0^t \sigma^2(s,X_s) f'(X_s) g'(X_s) ds \tag{4.4}$$

Inoltre se $f \in C^0([0,\infty)x\mathbb{R})$ *e* σ *è limitato sullo stesso supporto di* f *allora* $M^f \in M_2^c$*.*

Dim.
Osserviamo che dalla formula di Ito, se $f \in C^2$ ed M martingala continua a quadrato integrabile,

$$f(M_t) - f(M_0) = \int_0^t f'(M_s) dM_s + \frac{1}{2} f''(M_s) d < M, M >_s$$

inoltre sappiamo che se $M_t = W_t$ allora

$$f(W_t) - f(0) = \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} f''(W_s) ds$$

Se chiamiamo ora $Y(t) = f(X_t)$ applicando Ito alla funzione $Y(t)$ avremo:

$$\begin{aligned}
Y(t) - Y(0) &= \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d < X, X >_s \\
&= \int_0^t f'(X_s) \left[a(s,X_s)ds + \sigma(s,X_s)dW_s\right] + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma^2(s,X_s) ds \\
&= \int_0^t \left[f'(X_s)a(t,X_s) + \frac{1}{2} f''(X_s)\sigma^2(s,X_s)\right] ds + \int_0^t f'(X_s)\sigma(s,X_s) dW_s \\
&= \int_0^t f'(X_s)\sigma(s,X_s) dW_s + \int_0^t (A_s f)(s,X_s) ds
\end{aligned} \tag{4.5}$$

dove $(A_s f)$ è l'operatore definito in (4.2). Allora $Y(t) - Y(0) - \int_0^t (A_s f)(s,X_s) ds$ è una martingala continua. Abbiamo quindi ottenuto l'equazione (5.6). Ora se Y_1, Y_2 sono due processi per la formula di Ito di integrazione per parti, si ha:

$$Y_1(t)Y_2(t) - Y_1(0)Y_2(0) = \int_0^t Y_1 dY_2 + \int_0^t Y_2 dY_1 + < Y_1, Y_2 >_t$$

Inoltre usiamo il teorema che afferma che se M_1 ed M_2 sono due martingale continue a quadrato integrabile, allora esiste un unico processo varianza $< M_1, M_2 >_t$ t.c.

$$M_1(t)M_2(t) - < M_1, M_2 >$$

è una martingala locale.
Ora poichè il processo varianza di due processi è il processo varianza della sola parte martingala otteniamo che:

$$\begin{aligned} < M_1, M_2 > &= \int_0^t f'(X_s)dX_s, \int_0 g'(X_s)ds > \\ &= \int_0^t f'(X_s)g'(X_s)d < X, X >_s = \int_0^t f'(X_s)g'(X_s)\sigma^2(s, X_s)ds \end{aligned} \tag{4.6}$$

da cui abbiamo l'equazione (5.7). Ora data l'equazione (5.6) se introduciamo uno tempi di arresto :

$$S_n := \inf\{t \geq 0, |X_t| \geq n \textit{ oppure } \int_0^t \sigma^2(s, X_s)ds \geq n\}$$

e ricordando che una soluzione debole di (4.1) è una tripla $(X, W), (\Omega, \Im, P), \{\Im_t\}$ t.c. deve valere:

$$P\left(\int_0^t |a(s, X_s)| + \sigma^2(s, X_s)ds < \infty\right) = 1$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \ q.c.$$

e il processo

$$M_t^f := M_{t\wedge S_n} = \int_0^{t\wedge S_n} f'(s, X_s)\sigma(s, X_s)dW(s), \ n \geq 1$$

è una martingala continua. Inoltre se f è a supporto compatto e σ è limitata su tale supporto allora l'integranda in

$$M_t^f = \int_0^t f'(X_s)\sigma(t, X_s)dW_s$$

è limitata, dunque $M_t^f \in M_2^c$.
Diamo ora un'altra definizione del moto Browniano in termini del problema di martingala.

Definizione 4.4 *Un processo continuo e adattato* $W = \{W_t, \Im_t; 0 \le t < \infty\}$ *è un moto Browniano se e soltanto se:*

$$f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(W_s)ds \ , \Im_t; \ 0 \le t < \infty \tag{4.7}$$

è una martingala locale $\forall f \in C^2(\mathbb{R})$.

Definizione 4.5 *Una soluzione del problema di martingala associato al generatore* A_t *definito in (4.2), è una misura di probabilità* P *sullo spazio* $(C[0,\infty), \mathbb{B}([0,\infty)))$, *t.c.* $\forall f \in C^2(\mathbb{R})$ *il processo*

$$M_t^f = f(y(t)) - f(y(0)) - \int_0^t (A_s f)(y)ds \ , \Im_t; \ 0 \le t < \infty \tag{4.8}$$

è una martingala locale continua.

4.2 Esistenza

In questo paragrafo illustreremo i risultati di Strook e Varadhan sull'esistenza ed unicità della soluzione debole per una SDE nel caso in cui i coefficienti sono continui e limitati. Abbiamo visto nel capitolo precedente che se esiste una soluzione per l'equazione (4.1), allora il problema di martingala per (Af) definito in (4.2) è risolvibile. In realtà le due affermazioni sono equivalenti poichè l'esistenza di una soluzione del problema di martingala implica che esiste una soluzione debole della SDE associata.

Definizione 4.6 *Estensione di uno spazio di probabilità*
Sia X_t *un processo stocastico adattato sullo spazio* $(\Omega, \Im, P, \Im_t)$. *Se su* Ω *non è possibile costruire un moto Browniano e se* W *è un moto Browniano su* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Im}, \tilde{P}, \tilde{\Im}_t)$, *possiamo considerare lo spazio prodotto:*

$$(\Omega \times \tilde{\Omega}, \Im \times \tilde{\Im}, P \times \tilde{P})$$

munito della filtrazione $\tilde{\Im}_t$ *ed estendere i processi* X *e* W *ponendo:*

$$\tilde{X}(\omega, \tilde{\omega}) = X(\omega) \ , \quad \tilde{W}(\omega, \tilde{\omega}) = W(\tilde{\omega}) \ .$$

Allora abbiamo che sullo spazio prodotto $\tilde{W}$ *è un moto Browniano adattato a* $\Im_t$ *indipendente da* $\tilde{X}$.

Teorema 21 *Sia ξ una distribuzione su $\mathbb{R}$. Esiste P definita su $(C[0,\infty], \mathbb{B}([0,\infty)))$ soluzione del problema di martingala associato al generatore A_t con dato iniziale ξ (ovvero $P(\omega(0) \in H) = \xi(H)\ \forall H \in \mathbb{B}(R)$) se e solo se esiste un moto Browniano W definito su un'estensione $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Im}_t, \tilde{P})$ di $(C[0,\infty], \mathbb{B}([0,\infty)), P)$, t.c. l'estensione del processo $X_t(\omega) = \omega(t)$ sia una soluzione della SDE (4.1) con dato iniziale ξ.*

Il teorema che segue stabilisce l'equivalenza fra la soluzione del problema di martingala e la soluzione debole della SDE associata.

Teorema 22 *Consideriamo l'equazione differenziale stocastica:*

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{4.9}$$

dove i coefficienti $a(X_t), \sigma(X_t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sono funzioni limitate e continue. Sia μ una distribuzione su $\mathbb{R}$ t.c.

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^{2m} \mu(dx) < \infty \text{ per qualche } m > 1 \ .$$

Allora la SDE (4.9) ammette soluzione in senso debole con dato iniziale μ.

Teorema 23 *Una sequenza $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ di misure di probabilità su $(C[0,\infty), B([0,\infty))$ è stretta se e soltanto se valgono le seguenti:*

$$\lim_{\lambda\uparrow\infty} \sup_{n\geq 1} P_n[\omega;\ |\omega(0)| > \lambda] = 0$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{n\geq 1} P\omega;\ \max_{|s-t|<\delta}, 0 \leq s, t \leq T|\omega(s) - \omega(t)| > \epsilon \ .$$

Dim.
La dimostrazione di questo teorema consiste nella discretizzazione della SDE e sul passaggio al limite della successione (P_n) delle soluzioni del problema di martingala associato alle SDE discrete. Prima di cominciare la dimostrazione abbiamo bisogno dei seguenti risultati:

Lemma 4.7 *Sia $\{X^m\}_{m=1}^{\infty}$ una sequenza di processi stocastici. $X^{(m)} = \{X_t^{(m)}; 0 \leq t < \infty\}$ su $(\Omega, \Im_t, P)$, t.c soddisfano:*

1. $\sup_{m\geq 1} E|X_0^m|^\gamma < \infty$

2. $\sup_{m\geq 1} E\,|X_t^m - X_s^m|^\alpha \leq C_T|t-s|^{1+\beta}$

$\forall T>0$ e $s\geq 0$, $t\leq T$, α,β costanti positive e la costante C dipende solo da T. Allora la sequenza di misure di probabilità

$$P_m := P(X^{(m)})^{-1}$$

indotta dai processi X^m su $(C[0,\infty), B([0,\infty))$ è stretta.

Lemma 4.8 *Supponiamo che $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ sia una sequenza di misure di probabilità su $(C[0,\infty), B([0,\infty))$ che convergono debolmente ad una misura di probabilità P. Supponiamo inoltre che $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ sia una successione di funzioni uniformemente limitate, continue su $C[0,\infty)$ che converge ad una funzione limitata f. Allora:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C[0,\infty)} f_n(\omega)dP_n(\omega) = \int_{C[0,\infty)} f(\omega)dP(\omega)\ .$$

Torniamo ora alla dimostrazione del teorema:
Per j,n interi, $j\geq 0$,$n\geq 1$ consideriamo la seguente partizione dell'intervallo $[0,T]$: $t_j^{(n)} = j\frac{1}{s^n}$. Definiamo $\psi_(t) := t_j^{(n)}$, con $t\in[t_j^{(n)}, t_{j-1}^{(n)}]$. Inoltre definiamo i coefficienti come segue: $a^{(n)}(t,y) = b(y(\psi_n(t)))$ e $\sigma^{(n)}(t,y) = \sigma(y(\psi_n(t)))$, funzioni progressivamente misurabili per $0\leq t<\infty$, $y\in C[0,\infty)$. Consideriamo adesso lo spazio di probabilità $(\Omega,\Im,P)$ ed un moto Browniano $W = \{W_t, \Im_t^W, 0\leq t<\infty\}$ e un vettore X di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione iniziale μ e $\{\Im_t\}$ filtrazione t.c. $\Im_t := \sigma(\cap_{t\geq 0}\Im_t)$. $\forall n\geq 1$ definiamo i processi continui:

$$X_t^{(n)} = X_{t_j^{(n)}}^{(n)} + a(X_{t_j^{(n)}}^{(n)})(t-t_j^{(n)}) + \sigma(X_{t_j^{(n)}}^{(n)})(W_t - W_{t_j^{(n)}})$$

quindi $X_t^{(n)}$ è soluzione di

$$dX_t^{(n)} = a(X_{t_j^{(n)}})dt + \sigma(X_{t_j^{(n)}})dW_t$$

dove $j\geq 0$, $t_j < t \leq t_{j-1}^{(n)}$. Allora il processo $X^{(n)}$ è soluzione dell'equazione stocastica integrale

$$X_t^{(n)} = \xi + \int_0^t a^{(n)}(s,X^{(n)})ds + \int_0^t \sigma^{(n)}(s,X^{(n)})dW_s,\ 0\leq t<\infty$$

Fissato $0 < T < \infty$ vale il seguente risultato:

$$\sup_{n\geq 1} E\left|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}\right|^{2m} \leq C(1 + E|\xi|^{2m})(t-s)^{2m}$$

per $0 \leq s < t < T$ e C costante che dipende da m e T. Sia $P^{(n)} := P(X^{(n)})^{-1}$, $n \geq 1$ la sequenza di misure di probabilità indotta su $(C[0,\infty), B([0,\infty))$ dai processi $X^{(n)}$. Per il lemma (4.7) abbiamo che la successione di misure di probabilità $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge debolmente alla misura $P*$ sullo spazio $(C[0,\infty), B[0,\infty), P)$. Adesso è sufficiente dimostrare che:

1. $P^*(y \in C[0,\infty); y(0) \in \Gamma) = \mu(\Gamma)$, $\Gamma \in B(\mathbb{R})$
2. $E^*\left[f(y(t)) - f(y(0)) - \int_0^t (Af)(y(u))du|\mathcal{B}_s\right] = 0,\ q.c. - P^*$

Ora $\forall f \in C_b^2(\mathbb{R})$, dal fatto che $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge debolmente alla misura $P*$ abbiamo :

$$E^*(f(y(0))) = \lim_{n\to\infty} E^n f(y(0)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)$$

da cui segue la 1). Per dimostrare la 2) procediamo come segue: Ricordiamo che $\forall f \in C_0^2(\mathbb{R})$ e $n \geq 1$

$$f(y(t)) - f(y(0)) - \int_0^t (A_u^n f)(y)du\ ,\ \mathcal{B}_t;\ 0 \leq t < \infty$$

è una martingala per la misura P^n dove

$$(A_t^n f)(y) = a^n(t,y)\frac{\partial f(y(t))}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^{2(n)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

inoltre con $0 \leq s < t < \infty$ e $g : C[0,\infty] \to \mathbb{R}$ limitata , continua e $\mathcal{B}_t - misurabile$ abbiamo:

$$E^{(n)}\left[\left\{f(y(t)) - f(y(0)) - \int_s^t (A_u^{(n)} f)(y)du\right\} g(y)\right] = 0 \qquad (4.10)$$

Faremo vedere che per $0 \leq s < t < \infty$

$$F_n(y) := f(y(t)) - f(y(0)) - \int_s^t (A_u^{(n)} f)(y)du$$

converge uniformemente su $K \subset C[0,\infty)$, K compatto, alla funzione

$$F(y) := f(y(t)) - f(y(0)) - \int_s^t (Af)(y(u))du\ .$$

Poichè abbiamo dimostrato che la successione P^n è stretta, allora per il lemma (4.8) abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C[0,\infty)} f_n(\omega)dP_n(\omega) = \int_{C[0,\infty)} f(\omega)dP(\omega)$$

allora possiamo passare al limite per $n \to \infty$dentro l'equazione (4.10) ed otteniamo:

$$E^{(n)}[F^{(n)}(y)g(y)] \to E^*[F(y)g(y)] = 0$$

questo $\forall g(y)$ definita come sopra. Ora per il teorema enunciato (23) poichè P^n è stretta abbiamo che:

$$\sup_{y\in K, 0\leq u\leq t} |y(u)| < \infty$$

e

$$\limsup \max_{|s-t|<\frac{1}{2^n}} |y(s) - y(t)| = 0$$

inoltre poichè i coefficienti b, σ sono continui e limitati su $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \sup|y(\omega)| < \infty\}$ possiamo trovare $\forall\epsilon > 0$ un intero n_ϵ tc.

$$\sup_{0\leq s\leq t, y\in K} |a^{(n)}(s,y) - b(y(s))| + |\sigma^{(n)}(s,y) - \sigma(y(s))| \leq \epsilon, \ \forall n \geq n_\epsilon$$

Dunque abbiamo ottenuto l'uniforme convergenza delle $F^{(n)}$ ad F che conclude la dimostrazione.

4.3 Unicità

Discuteremo in questo paragrafo il problema dell'unictà della soluzione debole per l'equazione differenziali stocastica (5.2) nel problema di martingala. Osserviamo che essendo le ipotesi sui coefficienti più deboli non sono sufficienti per garantirne l'unicità che quindi rimane più complicata da dimostrare. L'unicità del problema di martingala è legata all'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy relativo all'operatore ellittico-parabolico $A_t + \partial_t$. Ricordiamo che due misure P, Q su $(C([0,\infty), \mathbb{B}([0,\infty)))$ sono uguali se e solo se hanno le stesse distribuzioni finito dimensionali, ossia:

$$P(\omega(t_1) \in H_1, ..., \omega(t_n) \in H_n) = Q(\omega(t_1) \in H_1, ..., \omega(t_n) \in H_n)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < .... < t_n$ e $H_1, ..., H_n \in \mathbb{B}(R)$.
Il seguente lemma fornisce una condizione sufficiente affinchè due soluzioni P e Q del problema di martingala con uguale dato iniziale abbiano la stessa distribuzione uno-dimensionale ovvero:

$$P(\omega(t) \in H) = Q(\omega(t) \in H)$$

$\forall t \geq 0$ e $H \in \mathbb{B}(R)$.

Lemma 4.9 *Siano P e Q due soluzioni del problema di martingala associato al generatore A_t con dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$, ovvero t.c. $P(\omega(0) \in H) = Q(\omega(0) \in H) = 1$. Supponiamo che $\forall T > 0$ e $f \in C_b(\mathbb{R})$ esiste una soluzione limitata $u \in C^{1,2}((0,T) \times \mathbb{R}) \cap C_b([0,T] \times \mathbb{R})$ del problema di Cauchy:*

$$A_t u(t,x) + \partial_t u(t,x) = 0 \quad (0,T) \times \mathbb{R}$$

$$u(T,\cdot) = f \quad \in \mathbb{R}$$

Allora P e Q hanno le stesse distribuzioni uno-dimensionali.

Teorema 24 ***Strook-Varadhan 1969*** *Consideriamo un'equazione differenziale stocastica definita in (4.1) t.c. i coefficienti $a(x)$ e $\sigma(x)$ siano misurabili e limitati, e sia A_t il generatore associato. Se $\forall T > 0$ e $\forall f \in C_b^\infty$ esiste una soluzione limitata del problema di Cauchy:*

$$A_t u(t,x) + \partial_t u(t,x) = 0 \quad (0,T) \times \mathbb{R}$$

$$u(T,\cdot) = f \quad \in \mathbb{R}$$

allora per la SDE si ha unicità in senso debole della soluzione.

5 Processi di Diffusione

5.1 La proprietà di Markov

Consideriamo un'equazione differenziale stocastica della forma:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{5.1}$$

dove $X_t \in \mathbb{R}$, $a, \sigma \in \mathbb{R}$ e W_t moto Browniano. a e σ sono chiamati rispettivamente drift e coefficiente di diffusione. La soluzione di un'equazione differenziale stocastica può essere pensata come la descrizione matematica del moto di particelle in un fluido in movimento; chiamiamo quindi questi processi stocastici come processi di diffusione.

Definizione 5.1 *Un processo di diffusione è detto omogeneo nel tempo se il processo stocastico $X_t(\omega) = X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ soddisfa la SDE:*

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \ , \ t \geq s; X_s = x \tag{5.2}$$

dove W_t è il moto Browniano e i coefficienti $a, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfano le condizioni di esistenza ed unicità, quindi vale:

$$|a(x) - a(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq k|x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Sia $X_t = X_t^{s,x}$ con $t \geq s$ l'unica soluzione di (5.2). Osserviamo che:

$$\begin{aligned} X_{s+h}^{s,x} &= x + \int_s^{s+h} a(X_u^{s,x})du + \int_s^{s+h} \sigma(X_u^{s,x})dW_u \\ &= x + \int_0^h a(X_{s+v}^{s,x})dv + \int_0^h \sigma(X_{s+v}^{s,x})d\tilde{W}_v \end{aligned} \tag{5.3}$$

dove $d\tilde{W}_v = dW_{s+v} - dW_s$. Osserviamo anche che:

$$X_h^{0,x} = x + \int_0^h a(X_v^{0,x})dv + \int_0^h \sigma(X_v^{0,x})dW_v$$

Poichè $\{\tilde{W}_v\}$ e $\{W_v\}$ hanno la stessa $P^0 - distribuzione$, dove P^0 indica la distribuzione del moto Browniano al tempo $t = 0$, allora per l'unicità debole della soluzione della SDE (5.2) con $X_0 = x$, segue che $\{X_{s+h}^{s,x}\}_{h\geq 0}$ e $\{X_h^{0,x}\}_{h\geq 0}$ hanno la stessa $P^0 - distribuzione$, ovvero $\{X_t\}_{t\geq 0}$ è omogenea nel tempo.

Introduciamo ora la proprietà di Markov per i processi di diffusione, ma prima abbiamo bisogno della seguente notazione. Sia Q^x la legge di probabilità di un processo di diffusione omogeneo nel tempo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ quando il dato iniziale è $X_0 = x \in \mathbb{R}$. L'aspettazione rispetto a Q^x è denotata con E^x. Abbiamo quindi:

$$E^x[f_1(X_{t_1})...f_k(X_{t_k})] = E[f_1(X^x_{t_1})...f_k(X^x_{t_k})] \tag{5.4}$$

$\forall f_i$ funzione di Borel e $t_1, ..., t_k \geq 0$ dove $k = 1, 2...$ e $E = E_P$ denota l'aspettazione rispetto alla legge di probabilità $P = P^0$ per $\{W_t\}_{t\geq 0}$ quando $W_0 = 0$. Sia $\Im_t$ la $\sigma - algebra$ generata da $\{W_r; r \leq t\}$ e sia $\mathcal{M}_t$ la $\sigma - algebra$ generata da $\{X_r; r \leq t\}$. X_t è $\Im_t$-misurabile, quindi $\mathcal{M}_t \subseteq \Im_t$.

Teorema 25 ***Proprietà di Markov***
Sia f una funzione di Borel, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione limitata. Allora per $t, h \geq 0$,

$$E^x[f(X_{t+h})\ |\Im_t](\omega) = E^{X_t(\omega)}[f(X_h)] \tag{5.5}$$

dove E^x indica l'aspettazione rispetto la misura di probabilità Q^x. La scrittura $E^y[(f(X_t)]$ significa $E[f(X^y_h)]$ dove E è l'aspettazione rispetto la misura P^0.

Dim:
Poichè per $r \geq t$,

$$X_r(\omega) = X_t(\omega) + \int_t^r a(X_u)\ du + \int_r^t \sigma(X_u)\ dW_u$$

dall'unicità abbiamo che $X_r(\omega) = X_r^{t,X_t}(\omega)$, in altre parole se definiamo $F(x, t, r, \omega) = X_r^{t,x}(\omega)$ per $r \geq t$, allora abbiamo:

$$X_r(\omega) = F(X_t, t, r, \omega);\ \ r \geq t\ . \tag{5.6}$$

Osserviamo che $\omega \to F(x, t, r, \omega)$ è indipendente da $\Im_t$. Usando la (5.6) riscriviamo la (5.5) nel seguente modo:

$$E[f(F(X_t, t, t+h, \omega))\ |\Im_t] = E[f(F(x, 0, h, \omega))]|_{x=X_t}\ . \tag{5.7}$$

Per t ed h fissati, sia $g(x, \omega) = (f \circ F)(x, t, t+h, \omega)$, allora la funzione $(x, \omega) \to g(x, \omega)$ è congiuntamente misurabile. Quindi possiamo approssimare g puntualmente con funzioni semplici:

$$g_m(x, \omega) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(x)\psi_k(\omega)$$

usando le proprietà dell'aspettazione condizionata abbiamo:

$$\begin{aligned}
&E[g_m(X_t,\omega)|\Im_t] = E[\lim_m \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(X_t)\psi_k(\omega)\ |\Im_t] \\
&= \lim \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(X_t)E[\psi_k(\omega)|\Im_t] \\
&= \lim \sum_{k=1}^{m} E[\varphi_k(y)\psi_k(\omega)|\Im_t]|_{y=X_t} = E[g(y,\omega)|\Im_t]|_{y=X_t} \\
&= E[g(y,\omega)]|_{y=X_t}\ .
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Di conseguenza, poichè $\{X_t\}$è omogeneo nel tempo,

$$E[f(F(X_t,t,t{+}h,\omega))|\Im_t] = E[f(F(y,t,t{+}h,\omega))]|_{y=X_t} = E[f(F(y,0,h,\omega))]|_{y=X_t}$$

ed abbiamo così ottenuto l'equazione (5.7).
Osservazione:
Il teorema appena dimostrato afferma che X_t è un processo di Markov rispetto alla famiglia di $\sigma - algebre\{\Im_t\}_{t\geq 0}$. Notiamo che dall'inclusione $\mathcal{M}_t \subseteq \Im_t$ segue che X_t è un processo di Markov rispetto alle $\sigma - algebre\{\mathcal{M}_t\}_{t\geq 0}$. Da questo segue che:

$$\begin{aligned}
&E^x[f(X_{t+h})|\mathcal{M}_t] = E^x[E^x[f(X_{t+h})|\Im_t]|\mathcal{M}_t] = \\
&E^x[E^{X_t}[f(X_h)|\mathcal{M}_t] = E^{X_t}[f(X_h)]
\end{aligned} \tag{5.9}$$

avendo usato la proprietà della torre ed il fatto che $E^{X_t}[f(X_h)]$ è $\mathcal{M}_t$ misurabile.

5.2 Proprietà di Markov Forte

La proprietà di Markov forte afferma che la relazione (5.5) continua a valere anche se il tempo t è un tempo d'arresto $\tau(\omega)$.

Definizione 5.2 *Sia $\{\mathcal{N}_t\}$ una famiglia crescente di $\sigma - algebre$ di sottoinsiemi di Ω. Una funzione $\tau : \Omega \to [0,\infty)$ è detto tempo d'arresto rispetto a $\{\mathcal{N}_t\}$ se $\{\omega, \tau(\omega) \leq t\} \in \{\mathcal{N}_t\}$, $\forall t \geq 0$.*

Definizione 5.3 *Sia τ un tempo d'arresto rispetto a $\{\mathcal{N}_t\}$ e sia $\mathcal{N}_\infty$ la più piccola $\sigma-$algebra che contiene $\mathcal{N}_t$, $\forall t \geq 0$. Allora la $\sigma-$algebra $\mathcal{N}_\tau$ consiste in tutti gli insiemi $N \in \mathcal{N}_\infty$ t.c. $N \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{N}_t$, $\forall t \geq 0$. Nel caso in cui $\mathcal{N}_t = \mathcal{M}_t$ definiamo $\mathcal{M}_t$ la $\sigma-$ algebra generata da $\{X_{s\wedge\tau}; s \geq 0\}$ e $\Im_\tau$ la $\sigma-$ algebra generata da $\{W_{s\wedge\tau}; s \geq 0\}$.*

Teorema 26 ***Proprietà di Markov forte***
Sia f una funzione di Borel limitata su $\mathbb{R}$, τ uno tempi di arresto rispetto a $\Im_t$, $\tau < \infty$ q.c., allora:

$$E^x[f(X_{\tau+h})|\Im_\tau] = E^{X_\tau}[f(X_h)] \ \forall h \geq 0 \tag{5.10}$$

Dim:
Procediamo alla dimostrazione del teorema in maniera analoga a come abbiamo fatto per la proprietà di Markov. Per q.o. ω abbiamo che $X_r^{\tau,x}(\omega)$ soddisfa:

$$X_{\tau+h}^{\tau,x} = x + \int_\tau^{\tau+h} a(X_u^{\tau,x})du + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_u^{\tau,x})dW_u$$

Ora per la proprietà di Markov forte per il moto Browniano il processo $\tilde{W}_v = W_{\tau+v} - W_\tau$ è ancora un moto Browniano per $v \geq 0$ indipendente da $\Im_\tau$. Di conseguenza

$$X_{\tau+h}^{\tau,x} = x + \int_0^h a(X_{\tau+v}^{\tau,x})dv + \int_0^h \sigma(X_{\tau+v}^{\tau,x})d\tilde{W}_v$$

dunque $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}_{h\geq 0}$ deve coincidere q.c. con l'unica soluzione forte Y_h dell'equazione

$$Y_h = x + \int_0^h a(Y_v)dv + \int_0^h \sigma(Y_v)d\tilde{W}_v \ .$$

poichè $\{Y_h\}_{h\geq 0}$ è indipendente da $\Im_\tau$, anche $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}$ deve essere indipendente. Inoltre dell'unicità debole possiamo concludere che $\{Y_h\}_{h\geq 0}$ e quindi $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}_{h\geq 0}$ hanno la stessa distribuzione di $\{X_h^{0,x}\}_{h\geq 0}$.
Poniamo $F(x,t,r,\omega) = X_r^{t,x}(\omega)$, $r \geq t$. Allora possiamo riscrivere la (5.10) nel seguente modo:

$$E[f(F(x,0,\tau+h,\omega))|\Im_\tau] = E[f(F(x,0,h,\omega))]|_{x=X_\tau^{0,x}}$$

e

$$
\begin{aligned}
&F(x,0,\tau+h,\omega)\\
&= X^{0,x}_{\tau+h}(\omega) = x + \int_0^{\tau+h} b(X_s)ds + \int_0^{\tau+h} \sigma(X_s)dW_s\\
&= x + \int_0^{\tau} b(X_s) + \int_0^{\tau} \sigma(X_s)dW_s + \int_\tau^{\tau+h} b(X_s)ds + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_s)dW_s\\
&= X^{0,x}_\tau + \int_\tau^{\tau+h} b(X_s)ds + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_s)dW_s\\
&= F(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega)
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

quindi la (5.10) è della forma:

$$E[f(F(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega))|\Im_t] = E[f(F(x,0,h,\omega))]|_{x=X^{0,x}_\tau} \ .$$

Poniamo $g(x,t,r,\omega) = f(F(x,t,r,\omega))$. Come abbiamo fatto precedentemente, approssimiamo g puntualmente:

$$g(t,x,r,\omega) = \sum_k \varphi_k(x)\psi_k(t,r,\omega) \ .$$

Allora poichè $X^{\tau,x}_{\tau+h}$ è indipendente da $\Im_\tau$ e per la considerazione fatta che $\{X^{\tau,x}_{\tau+h}\}_{h\geq 0}$ ha la stessa distribuzione di $\{X^{0,x}_h\}_{h\geq 0}$ abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&E[g(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega)|\Im_t] = \sum_k E[\varphi_k(X_\tau)\psi_k(\tau,\tau+h,\omega)|\Im_t]\\
&= \sum_k \varphi_k(X_\tau)E[\psi_k(\tau,\tau+h,\omega)|\Im_t] = \sum_k E[\varphi_k(X_\tau)\psi_k(\tau,\tau+h,\omega)|\Im_t]|_{x=X^{0,x}_\tau}\\
&= E[g(x,\tau,\tau+h,\omega)|\Im_t]|_{x=X^{0,x}_\tau} = E[g(x,\tau,\tau+h,\omega)]|_{x=X^{0,x}_\tau}\\
&= E[f(X^{\tau,x}_{\tau+h})]|_{x=X^{0,x}_\tau} = E[f(X^{0,x}_h)]|_{x=X^{0,x}_\tau}\\
&= E[f(F(x,0,h,\omega))]|_{x=X^{0,x}_\tau}
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Quindi questo conclude la dimostrazione del teorema.

5.3 Il generatore di un processo di diffusione

È fondamentale per molte applicazioni poter associare un operatore differenziale A del secondo ordine al processo X_t.

Definizione 5.4 *Sia $\{X_t\}$ un processo di diffusione omogeneo nel tempo in $\mathbb{R}$. Il generatore A di X_t è definito:*

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{E^x[f(X_t)] - f(x)}{t} \; ; \; x \in \mathbb{R} \tag{5.13}$$

L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. il limite esiste in x è denotato con $D_A(x)$, mentre $\mathcal{D}_A$ denota l'insieme delle funzioni per le quali il limite esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per trovare la relazione tra l'operatore A e i coefficienti a, σ di una SDE, abbiamo bisogno del seguente risultato.

Lemma 5.5 *Sia $Y_t^{0,x}$ un processo stocastico in $\mathbb{R}$ della forma:*

$$Y_t^{0,x}(\omega) = x + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dW_s$$

dove W_s è il moto Browniano unidimensionale. Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ ovvero $f \in C^2(\mathbb{R})$ ed è a supporto compatto. Sia τ un tempo d'arresto rispetto a $\Im_t$ e assumiamo che $E[\tau] < \infty$ q.c. Assumiamo che $u(t,\omega)$ e $v(t,\omega)$ siano limitate sull'insieme dei (t,ω) t.c. $Y(t,\omega)$ appartiene allo stesso supporto di f. Allora:

$$E^x[f(Y_t)] = f(x) + E^x\left[\int_0^\tau \left(u(s,\omega)\frac{\partial f}{\partial x}(Y_s) + \frac{1}{2}v^2(s,\omega)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(Y_s)\right) ds\right]$$

dove E^x è l'aspettazione rispetto alla naturale legge di probabilità R^x per Y_t partendo da x:

$$R^x[Y_{t_1} \in F_1, ..., Y_{t_k} \in F_k] = P^0[Y_{t_1}^x \in F_1, ..., Y_{t_k} \in F_k]$$

dove gli F_i sono insiemi di Borel.

Dim:
Poniamo $Z = f(Y)$ ed applichiamo la formula di Ito:

$$dZ = \frac{\partial f}{\partial x}(Y)dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(Y)d < Y, Y >_t = u\frac{\partial f}{\partial x}dt + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}d < W, W >_t + v\frac{\partial f}{\partial x}dW_t$$

allora

$$f(Y_t) = f(Y_0) + \int_0^t \left(u\frac{\partial f}{\partial x} + v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) ds + \int_0^t v \frac{\partial f}{\partial x} dW_s \ .$$

Quindi

$$\begin{aligned} E^x[f(Y_\tau)] &= f(x) + E^x \left[\int_0^\tau \left(u\frac{\partial f}{\partial x}(Y_s) + v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(Y_s) \right) ds + \int_0^\tau v \frac{\partial f}{\partial x}(Y_s) dW_s \right] \\ &= f(x) + E^x \left[\int_0^\tau \left(u\frac{\partial f}{\partial x}(Y_s) + v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(Y) \right) ds \right] + E^x \left[\int_0^\tau v \frac{\partial f}{\partial x}(Y) dW_s \right] \ . \end{aligned} \tag{5.14}$$

Ora per il teorema di convergenza delle sub-martingale, si ha che per τ tempo d'arresto, l'ultimo termine dell'equazione è la media della parte martingala che quindi è 0. Otteniamo quindi l'equazione iniziale che conclude la dimostrazione.

Teorema 27 *Sia X_t un processo stocastico omogeneo nel tempo*

$$dX_t = a(X_t)dX_t + \sigma(X_t)dW_t \ .$$

Se $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, allora $f \in \mathcal{D}_A$ e il generatore A_t è dato da:

$$Af(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial f}{\partial x}$$

Dim.
La dimostrazione segue dalla definizione di A e dal lemma precedentemente dimostrato con $\tau = t$.

Teorema 28 ***La formula di Dynkin***
Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R})$. Supponiamo che τ sia un tempo d'arresto, $E^x[\tau] < \infty$. Allora:

$$E^x[f(X_\tau)] = f(x) + E^x \left[\int_0^\tau Af(X_s)ds \right] \ . \tag{5.15}$$

Osserviamo che se τ è il primo tempo di uscita da un intervallo limitato, $E^x[\tau] < \infty$, allora l'equazione (5.15) vale per ogni funzione $f \in C^2$.

5.4 Equazione Backward di Kolmogorov

Sia X_t un processo di diffusione in $\mathbb{R}$ con generatore A. Se prendiamo $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ e $\tau = t$ nella formula di Dynkin (5.15), vediamo che

$$u(t,x) = E^x[f(X_t)]$$

è differenziabile in t e:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = E^x[Af(X_t)] \ . \tag{5.16}$$

Teorema 29 ***Equazione Backward di Kolmogorov***
Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R})$.

1. *Definiamo:*
$$u(t,x) = E^x[f(X_t)] \ . \tag{5.17}$$
Allora $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}_A$ per ogni t e
$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R} \tag{5.18}$$
$$u(0,x) = f(x); \ x \in \mathbb{R} \tag{5.19}$$

2. *Inoltre se $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ è una funzione limitata che soddisfa le equazioni (5.18) e (5.19), allora $w(t,x) = u(t,x)$ data da (5.17).*

Dim.
Dimostriamo la 1). Poniamo $g(x) = u(t,x)$. Allora poichè $t \to u(t,x)$ è differenziabile abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\frac{E^x[g(X_r)] - g(x)}{r} &= \frac{1}{r} E^x\left[E^{X_r}[f(X_t)] - E^x[f(X_t)]\right] \\
&= \frac{1}{r} E^x\left[E^x[f(X_{t+r})|\Im_r] - E^x[f(X_t)|\Im_r]\right] \\
&= \frac{1}{r} E^x[f(X_{t+r}) - f(X_t)] \\
&= \frac{u(t+r,x) - u(t,x)}{r} \to \frac{\partial u}{\partial t} \quad per\ r \downarrow 0 \ .
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Quindi

$$Au = \lim_{r \downarrow 0} \frac{E^x[g(X_r)] - g(x)}{r}$$

esiste e $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$, come volevamo dimostrare. Per dimostrare l'unicità della 2) assumiamo che una funzione $w(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ soddisfi le condizioni (5.18) e (5.19). Allora

$$\tilde{A}w := -\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = 0 \; per \quad t > 0, \; x \in \mathbb{R} \tag{5.21}$$

e

$$w(0, x) = f(x), \; x \in \mathbb{R} \; . \tag{5.22}$$

Fissati $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definiamo il processo Y_t in $\mathbb{R}^2$ come: $Y_t = (s - t, X_t^{0,x})$, $t \geq 0$. Allora Y_t ha generatore $\tilde{A}$ e così per la (5.21) e per la formula di Dynkin abbiamo per ogni $t \geq 0$:

$$E^{s,x}[w(Y_{t \wedge \tau_R})] = w(s, x) + E^{s,x}\left[\int_0^{t \wedge \tau_R} \tilde{A}w(Y_r)dr\right] = w(s, x)$$

dove $\tau_R = \inf\{t > 0, \; |X_t| \geq R\}$. Per $R \to \infty$ abbiamo che

$$w(s, x) = E^{s,x}[w(Y_t)] \; ; \; \forall t \geq 0 \; .$$

In particolare scegliendo $t = s$ otteniamo che:

$$w(s, x) = E^{s,x}[w(Y_s)] = E[w(0, X_s^{0,x})] = E[f(X_s^{0,x})] = E^x[f(X_s)] \; .$$

Questo completa la dimostrazione.

6 Problemi al bordo per equazioni differenziali stocastiche uno-dimensionali e omogenee nel tempo

6.1 Uscita da intervalli finiti

In questo capitolo tratteremo le equazioni differenziali stocastiche i cui coefficienti non dipendono esplicitamente dal tempo, sono equazioni della forma:

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{6.1}$$

dove $a(x)$ e $\sigma(x)$ sono funzioni continue in $\mathbb{R}$. Se queste funzioni soddisfano le condizioni:

1. per qualche $K > 0$, $|a(x)| + |\sigma(x)| \leq K(1 + |x|)$;

2. per qualche C esiste una costante L_C t.c. per $|x| \leq C$ e $|y| \leq C$ $|a(x) - a(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq L_C|x - y|$,

allora per ogni X_0 v.a. indipendente da W_t esiste un'unica soluzione dell'equazione (6.1) su un intervallo $[0, T]$ arbitrario, $T > 0$ che soddisfa la condizione iniziale $X(t) = X(0)$ per $t = 0$. Di conseguenza, in questo caso possiamo considerare la soluzione di (6.1) sul semi intervallo $[0, \infty)$. Enunciamo ora i teoremi e i relativi corollari che ci danno le formule necessarie al calcolo della media e media quadratica del tempo di uscita della soluzione da un intervallo limitato e la probabilità che il processo partendo da un generico punto esca prima da un estremo piuttosto che dall'altro.

Definizione 6.1 *Sia*

$$\tau_x[a, b] = \inf\{t \ : \ X_t \notin (a, b)\} \tag{6.2}$$

il primo tempo per cui il processo partendo da x esce dall'intervallo (a, b).

Denotiamo con $P^x(X_{\tau_{[a,b]}} = a)$ la probabilità che il processo partendo da x raggiunga il punto a prima di b.

Teorema 30 *Se $\sigma(x) > 0$ per $x \in [a,b]$, allora la variabile $\tau_x[a,b]$ è finita q.c. per $x \in [a,b]$ e $E[\tau_x[a,b]] = v(x)$ dove $v(x)$ è la soluzione della equazione differenziale*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)v''(x) + a(x)v'(x) = -1 \tag{6.3}$$

con $v(a) = v(b) = 0$.

Dim.
Usando la formula di Ito scriviamo:

$$\begin{aligned} v(X_x(t)) - v(x) &= \int_0^t v'(X_x(s))\sigma(X_x(s))dW(s) \\ &+ \int_0^t [a(X_x(s))v'(X_x(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_x(s))v''(X_x(s))]ds \end{aligned} \tag{6.4}$$

Posto $\tau_T := \inf\{T, \tau_x[a,b]\}$. Allora per $s < \tau_T$ la variabile $X_x(s)$ è contenuta nell'intervallo (a,b) e quindi:

$$a(X_x(s))v'(X_x(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_x(s))v''(X_x(s)) = -1 \; q.c.$$

Posto $t = \tau_T$ nell'equazione (6.4) otteniamo che

$$\tau_T = \int_0^{\tau_T} v'(X_x(s))\sigma(X_x(s))dW(s) + v(x) - v(X_x(\tau_T)) \; . \tag{6.5}$$

dove $E[\tau_T] = v(x) - E[v(X(\tau_T))]$. Poichè τ_T cresce asintoticamente a $\tau_x[a,b]$ per $T \to \infty$ e $E[\tau_T]$ è uniformemente limitata in T, abbiamo che $E[\tau_T] \to E[\tau_x[a,b]] < \infty$. Conseguentemente $\tau_x[a,b]$ è finita q.c., $X_x(\tau_T) \to X_x(\tau_x[a,b])$ q.c. e $v(X_x(\tau_T)) \to v(X_x(\tau_x[a,b])) = 0$ poichè $X_x[\tau_x[a,b]]$ è uguale a a o b. Ora poichè la funzione v è limitata in $[a,b]$, è possibile passare al limite sotto il segno di integrale ed abbiamo:

$$E\left[v(X_x(\tau_T))\right] \to 0 \; per \; T \to \infty$$

cosicchè

$$E[\tau_x[a,b]] = \lim_{T\to\infty} E[\tau_T] = v(x) - \lim_{T\to\infty} E[v(X_x(\tau_T))] = v(x)$$

e quindi questo conclude la dimostrazione.

Corollario 6.2 *Sia*

$$\phi(x) = \exp\left\{ - \int_a^x \frac{2a(z)}{\sigma^2(z)} dz \right\} .$$

Risolvendo per $v(x)$ troviamo che:

$$\begin{aligned} E_x \tau_{[a,b]} &= - \int_a^x 2\phi(y) \int_a^y \frac{dz}{\sigma^2(z)\phi(z)} dy \\ &+ \int_a^b 2\phi(y) \int_a^y \frac{dz}{\sigma^2(z)\phi(z)} dy \frac{\int_a^x \phi(z)dz}{\int_a^b \phi(z)dz} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Teorema 31 *Sotto le ipotesi del teorema precedente, $E(\tau_x^2[a,b]) = v_1(x)$, dove $v_1(x)$ è una soluzione di*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)v_1''(x) + a(x)v_1'(x) = -2v(x)$$

con $v_1(a) = v_1(b) = 0$ e dove $v(x)$ è stato precedentemente definito.

Dim.

Usiamo il fatto che $\tau_x[a,b]$ è finito e passando al limite per $T \to \infty$ otteniamo che:

$$\tau_x[a,b] = \int_0^{\tau_x[a,b]} v'(X_x(s))\sigma(X_x(s))dW_s + v(x) .$$

Da questo segue che:

$$E(\tau_x[a,b])^2 = E \int_0^{\tau_x[a,b]} \{v'(X_x(s))\sigma(X_x(s))\}^2 ds + v^2(x)$$

Osserviamo che tale media è finita perchè $v'(x)\sigma(x)$ è limitato in $[a,b]$ e $E\tau_x^2[a,b] < \infty$. Sia $z(x)$ una soluzione di:

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)z''(x) + a(x)z'(x) = -(v'(x)\sigma(x))^2$$

con condizioni al bordo $z(a) = z(b) = 0$. Usando la formula di Ito possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} z(X_x(\tau_x[a,b])) - z(x) &= - \int_0^{\tau_x[a,b]} [v'(X_x(s))\sigma(X_x(s))]^2 ds \\ &+ \int_0^{\tau_x[a,b]} z'(X_x(s))\sigma(X_x(s))dW_s \end{aligned} \tag{6.7}$$

Poichè $z(X_x(\tau_x[a,b]))=0$, abbiamo che

$$E\int_0^{\tau_x[a,b]}\{v'(X_x(s))\sigma(X_x(s))\}^2ds=z(x)\ ,$$

di conseguenza, $E(\tau_x[a,b])^2=z(x)+v^2(x)$. Se ponessimo $v_1(x)=z(x)+v^2(x)$ avremmo $v_1(a)=v_1(b)=0$ e

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma^2(x)v_1''(x)+a(x)v_1'(x)\\&=\frac{1}{2}\sigma^2(x)z''(x)+a(x)z'(x)+\frac{1}{2}\sigma^2(x)[2v(x)v''(x)+2(v'(x))^2]+2a(x)v(x)v'(x)\\&=[\sigma^2(x)v''(x)+2a(x)v'(x)]v(x)=-2v(x)\ .\end{aligned}\tag{6.8}$$

Il teorema è quindi dimostrato.
Indichiamo adesso con $P^x(X_{\tau[a,b]}=a)$ la probabilità che il processo $X_x(t)$ raggiunga il punto a prima di b partendo da x. È ovvio che se $x\notin[a,b]$ il processo raggiungerà q.c. il punto più vicino ad x essendo il processo continuo in t con probabilità 1. Il caso interessante è quindi quanto $x\in[a,b]$.

Teorema 32 *Sia $\sigma(x)>0$ per $x\in[a,b]$ e sia $u(x)$ una funzione non identicamente costante dell'equazione:*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)u''(x)+a(x)u'(x)=0$$

sull'intervallo $[a,b]$. Allora $P^x(X_{\tau_{[a,b]}}=a)=\frac{u(x)-u(b)}{u(a)-u(b)}$.

Dim.
La funzione $\psi(x)=\frac{u(x)-u(b)}{u(a)-u(b)}$ soddisfa l'equazione:

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)\psi''(x)+a(x)\psi'(x)=0$$

con $\psi(a)=1$ e $\psi(b)=0$. Quindi applicando la formula di Ito si ha:

$$\begin{aligned}&\psi(X_x(\tau_x[a,b]))-\psi(x)=\int_0^{\tau_x[a,b]}\sigma(X_x(s))\psi'(X_x(s))dW_s\\&+\int_0^{\tau_x[a,b]}\{\frac{1}{2}\sigma^2(X_x(s))\psi''(X_x(s))+a(X_x(s))\psi'(X_x(s))\}ds\\&=\int_0^{\tau_x[a,b]}\sigma(X_x(s))\psi'(X_x(s))dW_s\end{aligned}\tag{6.9}$$

di conseguenza, $E\psi(X_x(\tau_x[a,b])) = \psi(x)$. Ma $X_x(\tau_x[a,b]) = a$ con probabilità $P^x(X_{\tau_{[a,b]}} = a)$ e $X_x(\tau_x[a,b]) = b$ con probabilità $P^x(X_{\tau_{[a,b]}} = b)$, quindi

$$\psi(x) = E\psi(X_x(\tau_x[a,b])) = \psi(a)P^x(X_{\tau_{[a,b]}} = a) + \psi(b)P^x(X_{\tau_{[a,b]}} = b) = P^x(X_{\tau_{[a,b]}} = a)\ .$$

Il teorema è così dimostrato. Enunciamo ora il seguente corollario le cui formule le applicheremo direttamente nel capitolo successivo.

Corollario 6.3 *Questo corollario ci fornisce le formule relative alla probabilità di uscita dall'intervallo a sinistra prima che a destra e viceversa. valgono le seguenti:*

1. $P^x(X_{\tau_{[a,b]}} = a) = \frac{\int_x^b \phi(z)dz}{\int_a^b \phi(z)dz}$;
2. $P^x(X_{\tau_{[a,b]}} = b) = \frac{\int_a^x \phi(z)dz}{\int_a^b \phi(z)dz}$

7 Esempi di problemi uno-dimensionali degeneri al bordo

7.1 Condizioni al bordo su intervalli finiti

Studieremo in questo capitolo il comportamento delle soluzioni di equazioni differenziali stocastiche all'interno di un intervallo finito (r_1, r_2). Consideriamo una SDE omogenea nel tempo:

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \ , \ X_0 = x$$

con $\sigma(x) > 0$ e t.c. si annulli al bordo dell'intervallo. Un ruolo importante nello studio delle soluzioni di queste equazioni differenziali lo svolge la funzione $\varphi(x)$ definita nel seguente modo:

$$a(x)\varphi'(x) + \frac{1}{2}\varphi''(x) = 0 \tag{7.1}$$

Definiamo con $L[\varphi]$ l'operatore

$$a(x)\frac{d}{dx}L[\varphi(x)] + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{d}{dx^2}L[\varphi] = 0 \ .$$

Una funzione che soddisfi $L[\varphi] = 0$ è detta funzione L-armonica. Allora per ogni funzione arbitraria L-armonica si ha:

$$\varphi'(x) = C\exp\{-\int_0^t \frac{2a(z)}{\sigma^2(z)}\} \tag{7.2}$$

Allora φ non è una costante i conseguenza $\varphi'(x)$ non si annulla e quindi φ è monotona. La connessione tra le funzioni L-armoniche e la soluzione delle equazioni differenziali stocastiche omogenee nel tempo permette di studiare il comportamento asintotico delle soluzioni delle SDE al bordo dell'intervallo di definizione. Assumiamo che $a(t, x)$ e $\sigma(t, x)$ siano definite e continue per $t \geq 0$, $x \in (r_1, r_2)$ e che soddisfino le condizioni di Lipschitz su ogni intervallo chiuso $[\bar{r_1}, \bar{r_2}] \subset (r_1, r_2)$, ovvero per ogni intervallo esiste una costante k per la quale

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y, \in [\bar{r_1}, \bar{r_2}].$$

Adesso consideriamo una sequenza di funzioni $a_n(t,x)$ e $\sigma_n(t,x)$ che soddisfino le condizioni dei teoremi di esistenza ed unicità della soluzione, e tali che $a_n(t,x) = a(t,x)$ e $\sigma_n(t,x) = \sigma(t,x)$ per $x \in (r_1^{(n)}, r_2^{(n)})$, dove $r_1^{(n)} \downarrow r_1$ e $r_2^{(n)} \uparrow r_2$. Sia $X_n(t)$ la soluzione di

$$dX_n(t) = a_n(t, X_n(t))dt + \sigma_n(t, X_n(t))dW_t$$

con condizione iniziale $X_n(0) = X(0) \in (r_1, r_2)$. Definiamo

$$\tau_n := \begin{cases} \inf\{s : X_n(s) \notin [\bar{r_1}, \bar{r_2}]\} & \text{se}[\bar{r_1}, \bar{r_2}] \neq \emptyset \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Studiamo adesso la dipendenza dal bordo dei coefficienti $a(x)$ e $\sigma(x)$ nel caso in cui questi siano indipendenti dal tempo per $x \in (r_1, r_2)$. Sia

$$\varphi(x) = \int_{x_1}^{x} exp\{-\int_{x_0}^{y} \frac{2a(z)}{\sigma^2(z)} dz\} dy \tag{7.3}$$

per $x \in (r_1, r_2)$ e x_0, x_1 punti di (r_1, r_2). Dove φ è stata ottenuta da (7.2).
Sia $X_x(t)$ una soluzione di

$$dX_x(t) = a(X_x(t))dt + \sigma(X_x(t))dW(t)$$

fino al tempo di uscita dall'intervallo (r_1, r_2) con $X_x(0) = x$.
Sia $(\alpha, \beta) \subset (r_1, r_2)$ e sia $\tau_x[\alpha, \beta]$ il primo tempo in cui $X_x(t)$ raggiunge il bordo di dove $x \in (\alpha, \beta)$.
Dal teorema (32) si ottiene che la probabilità per la soluzione di uscire dal bordo in α prima che in β è:

$$P_x(X(\tau_{[\alpha,\beta]}) = \alpha) = \frac{\varphi(\beta) - \varphi(x)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}$$

e

$$P_x(X(\tau_{[\alpha,\beta]}) = \beta) = \frac{\varphi(x) - \varphi(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}$$

dove φ è data da (7.3). Enunciamo ora un teorema il cui risultato è più forte in quanto fa vedere che nel caso in cui il drift spinge all'interno di un intervallo finito e il coefficiente di diffusione è identicamente nullo agli estremi, se il processo parte dal bordo all'istante successivo sarà dentro l'intervallo e ci rimarrà per quanto dimostreremo successivamente.

Teorema 33 *Assumiamo che* $\sigma(x_0) = 0$, $a(x_0) > 0$ *e che per qualche* $\delta > 0$ $\sigma(x) > 0$ *per* $0 < |x - x_0| < \delta$. *Allora* $\forall t > 0$ *e* $x \geq x_0$, $P(X_x(t) > x_0) = 1$.

Dim:
Mostriamo per prima cosa che $P(X_x(t) > x_0) = 1$ per $x > x_0$. Denotiamo per $x > x_0$, $x_1 > x_0$,

$$\varphi(x) = \int_{x_1}^{x} \exp\left\{-\int_{x_1}^{y} \frac{2a(z)}{\sigma^2(z)} dz\right\} dy.$$

Prendiamo δ_1, δ e $x \in (x_0 + \delta_1, x_0 + \delta)$. Sia $\tau_x[x_0 + \delta_1, x_0 + \delta]$ il primo tempo in cui $X_x(t)$ lascia l'intervallo $(x_0 + \delta_1, x_0 + \delta)$. Dal corollario (6.3) si ottiene che:

$$P(X_x(\tau_x[x_0 + \delta_1, x_0 + \delta]) = x_0 + \delta_1) = \frac{\varphi(x_0 + \delta) - \varphi(x)}{\varphi(x_0 + \delta) - \varphi(x_0 + \delta_1)}$$

Per le assunzioni fatte si noti che:

$$\begin{aligned} -\int_{x_1}^{y} \frac{2a(z)}{\sigma^2(z)} dz &= \int_{y}^{x_1} \frac{2a(z)}{\sigma^2(z)} dz \\ \geq C \int_{y}^{x_1} \frac{dz}{(z - x_0)^2} &= C[\frac{1}{y - x_0} - \frac{1}{x_1 - x_0}] \end{aligned} \tag{7.4}$$

per qualche C costante positiva poichè $a(z) > C_1 > 0$ e

$$\frac{1}{\sigma^2(z)} = \frac{1}{[\sigma(z) - \sigma(x_0)]} \geq \frac{1}{h^2(z - x_0)^2}$$

di conseguenza

$$\int_{x_0+\delta_1}^{x_0+\delta} \exp\{-\int_{x_1}^{y} \frac{2a(z)}{\sigma^2(z)} dz\} dy > C_2 \int_{x_0+\delta_1}^{x_0+\delta} e^{\frac{C}{y - x_0}} dy \to +\infty \tag{7.5}$$

per $\delta_1 \to 0$, cosicchè $P(X_x(t) = \delta_1 + x_0) \to 0$ per $\delta_1 \to 0$.
Quindi, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ il processo $X_x(t)$ raggiunge il punto $x_0 + \delta$ prima di x_0 con probabilità 1.
Sia $\tau^{(1)}$ il tempo per cui $\tau^{(1)} > \tau_x[x_0, x_0 + \delta]$, $X_x(t) = x$ e $X_x(s) \neq x$ per $\tau < s < \tau^{(1)}$. Assumendo che $X_x^{(1)}(t) = X_x(t + \tau^{(1)})$ e definendo $\tau^{(2)}$ per $X_x^{(1)}(t)$ come è stato fatto per $\tau^{(1)}$ per $X_x(t)$. Continuando nello stesso modo,

si definisce una sequenza di tempi $\tau^{(k)}$ rispetto ai processi $X_x^{(k)}(t)$. Osserviamo che $\tau^{(k)}$ sono v.a. i.i.d. e $P(\tau^{(k)} > 0) = 1$. Di conseguenza

$$P\{\sum_{k=1}^{\infty} \tau^{(k)} = +\infty\} = 1$$

Poichè

$$P\{X_x^{(k)} > x_0 \ per \ 0 \leq t \leq \tau^{(k+1)}\} = 1$$

si ha che

$$P\{X_x(t) > x_0 \ per \ \tau^{(1)} + ... + \tau^{(k)} \leq t \leq \tau^{(1)} + ... + \tau^{(k+1)}\} = 1$$

e

$$P\{X(t) > x_0 \, per \, t > 0\} = P\left(\prod_{n=0}^{+\infty} \left\{ X_x(t) > x_0 \ per \ \sum_{k=1}^{n} \tau^{(k)} \leq t \leq \sum_{k=1}^{n+1} \tau^{(k)} \right\}\right) = 1 \tag{7.6}$$

Per $x > x_0$ il teorema è dunque dimostrato.
Allo scopo di dimostrare che $P\{X(t) > x_0 \ per \ t > 0\} = 1$ è sufficiente verificare che con probabilità 1 esiste un $\epsilon > 0$ tale che $X_{x_0}(t) > x_0$ per $0 < t < \epsilon$. Calcoliamo adesso $\int_0^t \sigma(X_{x_0}(s))dW(s)$ per t piccolo.
Sia

$$\varphi(t) = E[\int_0^t \sigma(X_{x_0}(s))dW(s)]^2 = E \int_0^t \sigma^2(X_{x_0}(s))ds \tag{7.7}$$

Usando le condizioni di Lipschitz si ottiene:

$$\begin{aligned}
&E\sigma^2(X_{x_0}(s)) = E[\sigma(X_{x_0}(s)) - \sigma(x_0)]^2 \\
&\leq Ek^2|X_{x_0}(s) - x_0|^2 \\
&= k^2E| \int_0^s |a(X_{x_0}(u))du + \int_0^s \sigma(X_{x_0}(u))dW(u)|^2 \\
&\leq k_1s^2 + k_2\varphi(s)
\end{aligned} \tag{7.8}$$

dove k_1 e k_2 sono delle costanti. Quindi,

$$\varphi(t) \leq k_3t^3 + k_2 \int_0^t \varphi(s)ds$$

usando ora il lemma di Gronwall si ottiene

$$\varphi(t) \leq e^{k_2t} \int_0^t e^{-k_2s}3k_3s^2ds \leq k_3e^{k_2t}t^3$$

di conseguenza esiste un H tale che che $\varphi(t) \leq Ht^3$ per t sufficientemente piccolo.
Inoltre per il teorema (19) segue che

$$P\{\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \sigma(X_{x_0}(u))dW(u)\right| > \epsilon t\} \leq \frac{\varphi(t)}{\epsilon^2 t^2} \leq \frac{Ht}{\epsilon^3}$$

di conseguenza

$$\begin{aligned} &P\left\{\sup_{2^{-k}\leq s\leq 2^{-k+1}} \frac{1}{s}\left|\int_0^s \sigma(X_{x_0}(u))dW(u)\right| > \frac{1}{k}\right\} \leq \\ &P\left\{\sup_{0\leq s\leq 2^{-k+1}} \left|\int_0^s \sigma(X_{x_0}(u))dW(u)\right| > \frac{2^{-k}}{k}\right\} \leq \frac{4Hk^2}{2^k} \end{aligned} \tag{7.9}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\sup_{2^{-k}\leq s\leq 2^{-k+1}} \frac{1}{s}\left|\int_0^s \sigma(X_{x_0}(u))dW(u)\right| > \frac{1}{k}\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4Hk^2}{2^k} < \infty$$

per il lemma di Borel Cantelli per ogni k sufficientemente grande con probabilità 1

$$\sup_{2^{-k}\leq s\leq 2^{-k+1}} \frac{1}{s}\left|\int_0^s \sigma(X_{x_0}(u))dW(u)\right| \leq \frac{1}{k}$$

con probabilità 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \sigma(X_{x_0}(u))dW(u) = 0$$

e con probabilità 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t a(X_{x_0}(s))ds = a(x_0) > 0,$$

così si ha

$$P\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}(X_{x_0}(t) - x_0) = a(x_0)\} = 1$$

Si può determinare un $\epsilon > 0$ tale che per $0 < t < \epsilon$ $X_{x_0}(t) - x_0 > \frac{a(x_0)}{2}t$. Questo conclude la dimostrazione del teorema. Infine enunciamo il teorema conclusivo della tesi.

Teorema 34 *Sia* (r_1, r_2) *un intervallo limitato di* $\mathbb{R}$*, sia* $\beta \in (r_1, r_2)$*. Sia*

$$L_1(\beta) = \int_{r_1}^{\beta} exp\{-\int_{\beta}^{z} \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')} dz'\} dz$$

Se $L_1(\beta) = +\infty$ *allora* $\forall x \in (r_1, \beta)$ *il processo* $X_x(t)$ *raggiunge il punto* β *prima di* r_1 *con probabilità 1. In questo caso* r_1 *è detto bordo naturale.*

Dim.
Per comodità di notazione, poniamo $(r_1, r_2) = (0, 1)$. Consideriamo una SDE omogenea nel tempo e ci limitiamo all'intervallo $[0, 1]$.

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \; ; X(0) = x \in [0, 1] \; .$$

dove il drift e il coefficiente di diffusione sono rispettivamente parametro ed Holder di parametro 1/2. Dal teorema (33) sappiamo che se il processo parte da un estremo dell'intervallo, all'istante successivo entrerà nell'intervallo q.c. poichè il drift spinge all'interno. Quello che vogliamo dimostrare è che una volta che il processo entra dentro l'intervallo, non raggiungerà più il bordo con probabilità 1. Definiamo ora τ tempi di arresto , il primo tempo in cui il processo raggiunge il bordo:

$$\tau := \inf\{t : \; X(t) = \{0, 1\}\} \; . \tag{7.10}$$

Allora volgiamo dimostrare che $P_x(\tau < \infty) = 0$, $x \in (0, 1)$. Dimostriamo che a tale scopo è sufficiente dimostrare che:

$$P_x\left(X_{\tau_{[1/n,\beta]}} = \frac{1}{n}\right) \to 0 \; per \; n \to \infty. \tag{7.11}$$

Infatti facciamo la seguente osservazione: poichè $\tau_{[1/n,\beta]} \uparrow \tau_{[0,\beta]}$ per il teorema della convergenza monotona,

$$P_x\left(X_{\tau_{[0,\beta]}} = \beta\right) \geq P_x\left(X_{\tau_{[1/n,\beta]}} = \beta\right) \; \forall n \; .$$

Basterà dimostrare adesso che

$$P_x\left(X_{\tau_{[1/n,\beta]}} = \beta\right) \to 1 \; per \; n \to \infty$$

in questo modo

$$P_x\left(X_{\tau_{[0,\beta]}} = \beta\right) = 1 \; q.c.$$

Per dimostrare la (7.11) passiamo al complementare della probabilità. Prima di procedere al calcolo osserviamo quali condizioni dobbiamo avere sui coefficienti $a(x)$ e $\sigma^2(x)$ affinchè $L_1 = \infty$.

$$L_1 = \int_0^{\beta} e^{\int_z^{\beta} \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')}dz'} dz \geq \int_0^{\epsilon} e^{\int_z^{\delta} \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')}dz' + \int_{\delta}^{\beta} \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')}dz'} dz \tag{7.12}$$

Facciamo lo sviluppo di Taylor al primo ordine di $\sigma^2(z)$ e di $a(z)$ in 0, si ha osservando che $\frac{o(z)}{z} \to 0$ per $z \to 0$ e $o(1) = 0$ allora:

$$\begin{aligned} L_1 \simeq \int_0^{\epsilon} e^{\int_z^{\beta} \frac{a(0)+0(1)}{z' \frac{d}{dz'}\sigma^2(z')|_{z'=0} + o(z')}dz'} dz \simeq \int_0^{\epsilon} e^{\frac{a(0)}{(\sigma^2)'(0)} \log z'|_z^{\beta}} dz = \\ \int_0^{\epsilon} e^{\frac{a(0)}{(\sigma^2)'(0)}[\log\beta - \log z]} dz \simeq \int_0^{\epsilon} \frac{1}{z^{\frac{a(0)}{(\sigma^2)'(0)}}} dz \ . \end{aligned} \tag{7.13}$$

Allora $L_1 = \infty$ se e soltanto se $\frac{a(0)}{(\sigma^2)'(0)} \geq 1$, mentre converge per $\frac{a(0)}{(\sigma^2)'(0)} < 1$. Adesso calcoliamo la probabilità di uscita dall'intervallo $(0, 1)$. Usando ora il corollario (6.3), calcoliamo qual è la probabilità che partendo da $x \in (0, 1)$ il processo X raggiunga il punto $1/n$ prima di β. Vogliamo dimostrare che questa probabilità tenderà a 0 q.c. .

$$P_x\left(X(\tau_{[1/n,\beta]}) = \frac{1}{n}\right) = \frac{\int_x^{\beta} \varphi(z)dz}{\int_{1/n}^{\beta} \varphi(z)dz} \equiv \frac{N}{D} \tag{7.14}$$

dove:

$$\varphi(z) = \exp\left\{-\int_{1/n}^{z} \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')}dz'\right\}$$

Supponiamo $L_1 = \infty$ dunque $\frac{a(0)}{(\sigma^2)'(0)} \geq 1$. Chiamiamo $A = \frac{a(0)}{(\sigma^2)'(0)} \geq 1$. Studiamo ora separatamente il numeratore N ed il denominatore D.
Osserviamo che se $1/n < z < \beta$ allora la funzione $\varphi(z)$ diventa:

$$\varphi(z) = exp\left\{-\int_{1/n}^{x} \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')}dz' - \int_{x}^{z} \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')}dz'\right\}$$

dove il secondo termine sarà una costante C e usando nuovamente la formula di Taylor sui coefficienti a, σ, otteniamo che:

$$
\begin{aligned}
N &\simeq \int_x^\beta C\ e^{-\int_{1/n}^x \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')}dz'} dz \\
&\simeq C \int_x^\beta e^{-A\int_{1/n}^x \frac{1}{z'}dz'} = C \int_x^\beta e^{-A\log(x)+A\log(1/n)} dz \\
&\simeq C_1 \frac{1}{n^A}
\end{aligned} \tag{7.15}
$$

Dunque abbiamo ottenuto che $N \simeq \frac{1}{n^A}$.
Studiamo ora il denominatore:

$$
D = \int_{1/n}^\beta e^{-\int_{1/n}^x \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')}dz' - \int_x^z \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')}dz'} dz \tag{7.16}
$$

Ai fini dello studio della convergenza ci interessa calcolare solo il termine:

$$
\begin{aligned}
D &\simeq \int_{1/n}^\beta e^{A\int_z^x \frac{1}{z'}dz'} dz = \int_{1/n}^\beta e^{A\log(x)-A\log(z)} dz \\
&= \int_{1/n}^\beta x^A \frac{1}{z^A} dz\ .
\end{aligned} \tag{7.17}
$$

Osserviamo che per $A = 1$ abbiamo che $N \simeq \frac{1}{n}$ e $D \simeq \log(n)$, da cui:

$$
\frac{N}{D} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\log(n)} = 0\ .
$$

Per $A > 1$ otteniamo che $D \simeq \frac{1}{n^{1-A}}$ da cui l'equazione (7.14) diventa:

$$
\frac{N}{D} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{2A-1}} = 0\ .
$$

Osserviamo ora che il denominatore nell'equazione (7.14) per la monotonia converge all'integrale L_1 :

$$
\int_{1/n}^\beta \varphi(z)dz \uparrow L_1 = +\infty
$$

infatti:

$$
D = \int_{1/n}^\beta e^{\int_z^x \frac{1}{z'}dz'} dz = \int_0^\beta e^{\int_z^x \frac{1}{z'}dz'} 1_{\{z\geq 1/n\}}(z) dz
$$

chiamiamo $f_n := e^{\int_z^x \frac{1}{z'}dz'} 1_{z\geq 1/n}(z)$ allora $f_n \uparrow f$ dove $f = e^{\int_z^x \frac{1}{z'}dz'} 1_{z\geq 0}$ e $f \geq 0$, allora per la monotonia possiamo concludere che $D \uparrow L_1$. In maniera analoga si calcola che:

$$
P_x(X_{\tau_{[\beta',1-1/n]}} = 1 - 1/n) \to 0 \textit{ per } n \to \infty\ .
$$

Corollario 7.1 *Siano $\beta, \beta' \in [r_1, r_2]$ e siano*

$$L_1(\beta) = \int_{r_1}^{\beta} \exp\left\{\int_z^{\beta} \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')} dz'\right\} dz$$

e

$$L_2(\beta') = \int_{\beta'}^{r_2} \exp\left\{\int_{\beta'}^{y} \frac{2a(z')}{\sigma^2(z')} dz'\right\} dy$$

Allora $\tau[r_1, r_2] = \infty$ se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = \infty$.

Dim.
Segue direttamente da quanto dimostrato fino adesso, infatti abbiamo visto che se $L_1 = \infty$ vuol dire che il processo partendo all'interno dell'intervallo (r_1, β) q.c. raggiungerà il punto β prima di r_1 e e in maniera analoga se $L_2 = \infty$ vuol dire che il processo partendo all'interno dell'intervallo (β', r_2) raggiungerà q.c. β' prima di r_2. Dunque $\tau[r_1, r_2] = \infty$.

7.2 Problema 1.

Consideriamo la seguente equazione:

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t);\ X(0) = x \in (0,1)\ .$$

dove $a(x) = 1 - 2x$, $\sigma(x) = \sqrt{x(1-x)}$, per $x \in [0,1]$. Il nostro obiettivo è quello di vedere cosa si può dire riguardo l'esistenza e l'unicità della soluzione e osservare il comportamento del processo al bordo. Osserviamo prima di tutto che il coefficiente $a(x)$ soddisfa la condizione di Lipschitz e $\sigma(x)$ è Holderiana di parametro $1/2$. Inoltre il drift spinge all'interno infatti $a(0) = 1$ e $a(1) = -1$ e per il teorema (33) sappiamo che nel caso in cui il processo parte da un punto del bordo entra subito all'interno dell'intervallo e q.c. non uscirà più da questo per quanto dimostrato nel teorema (34). Il bordo in questo caso quindi è detto naturale. Per poter applicare il teorema (34) è sufficiente verificare la condizione

$$A := \frac{a(0) + o(1)}{z\frac{d}{dz}\sigma^2(z)|_{z=0} + o(z)} \geq 1$$

Nel problema che stiamo considerando tale condizione è verificata in quanto $a(0) = 1$ e $\sigma^2(x) \simeq x$ da cui $(\sigma^2)'(0) = 1$. Allora possiamo concludere che il processo q.c. non abbandonerà l'intervallo $(0,1)$ ed inoltre per il teorema che dimostreremo di seguito, esiste ed è unica la soluzione forte del problema.

Teorema 35 *Esistenza ed unicità della soluzione forte*
Consideriamo la SDE omogenea nel tempo:

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t;\ X(0) = x \in (r_1, r_2) \tag{7.18}$$

dove (r_1, r_2) *un intervallo limitato di* $\mathbb{R}$. *Assumiamo che* $\frac{1}{\sigma^2(x)}$ *sia localmente integrabile e* $\sigma^2(x) > 0\ \forall x \in (r_1, r_2)$. *Inoltre* $\forall x \in [r_1, r_2], \exists \epsilon > 0$ *t.c.*

$$\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{|a(x)|}{\sigma^2(x)} dx < \infty\ .$$

Infine i coefficienti soddisfano le seguenti condizioni:

$$|a(x) - a(y)| \leq k|x - y|\ \forall x, y \in (r_1, r_2)$$

e
$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq h(|x-y|) \ \forall x, y \in (r_1, r_2)$$
dove k è una costante positiva e $h(\cdot)$ funzione strettamente crescente, t.c. $h(0) = 0$ e
$$\int_0^\epsilon \frac{1}{h^2(u)} du = \infty \ \forall \epsilon > 0.$$
Allora per ogni condizione iniziale indipendente dal moto Browniano l'equazione (7.18) ha un'unica soluzione forte.

Dim. La dimostrazione del teorema segue dal fatto che per sotto le ipotesi fatte esiste la soluzione debole dell'equazione fino al tempo di esplosione ed inoltre per il teorema (20) si ha unicità forte della soluzione. Quindi esiste ed è unica la soluzione forte del problema.

7.3 Problema 2.

Il problema di cui ci vogliamo occupare adesso è di risolvere la seguente equazione differenziale stocastica omogenea nel tempo:

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t;\ X(0) = x \in (0,1)\ .$$

dove:

$$a(x) = \frac{-3x(1-x)(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})}{2(x^{3/2}+(1-x)^{3/2})^2} + \frac{1-2x}{x^{3/2}+(1-x)^{3/2}} + \frac{d-2}{2}\frac{1-2x}{x^{3/2}+(1-x)^{3/2}}$$

e

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{x(1-x)}{x^{3/2}+(1-x)^{3/2}}}\ .$$

Vedremo che il problema sarà trattabile solo nel caso in cui $d \geq 2$. Osserviamo che il drift soddisfa la condizione di Lipshiz in quanto la sua derivata è limitata all'interno dell'intervallo $(0,1)$ e il coefficiente di diffusione è Holderiano di parametro $1/2$, poichè soddisfa:

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq k|x-y|^{1/2}\ \forall x, y \in (0,1)\ k \geq 0\ .$$

Dove $y \simeq x + \epsilon$. Eseguiamo il calcolo ponendo:
$\sigma(x) = \sqrt{f(x)}$ e
$D(x) = x^{3/2} + (1-x)^{3/2}$.

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(y)}\right| &= \frac{f(x)-f(y)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}} = \frac{\frac{x(1-x)D(x)-y(1-y)D(x)}{D(x)D(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}} \\ &\simeq \frac{[x(1-x)-y(1-y)]D(y) + [D(y)-D(x)][y(1-y)]}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}} \\ &\simeq \frac{|x-y| + x[D(y)-D(x)]}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\end{aligned} \tag{7.19}$$

Avendo usato il fatto che $x(1-x) \simeq x$ per $x \in (0,1)$ e $D(x)D(y) \simeq 1$. Allora studiamo il termine seguente:

$$\begin{aligned}[D(y) - D(x)] &= (y^{3/2} - x^{3/2}) + ((1-y)^{3/2} - (1-x)^{3/2}) \\ &\leq y^{3/2} - x^{3/2} = \int_x^y \frac{2}{3}\sqrt{z}dz \\ &\leq \frac{2}{3}|y-x| \cdot \max\{\sqrt{x}, \sqrt{y}\}\end{aligned} \tag{7.20}$$

Allora l'equazione (7.19) diventa:

$$\begin{aligned}
\frac{|x-y| + x[D(y) - D(x)]}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} &\simeq \frac{|x-y| + x|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
&\simeq \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = |x-y|^{1/2} \frac{|x-y|^{1/2}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
&\leq |x-y|^{1/2} \frac{|x+y|^{1/2}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \sqrt{2}|x-y|^{1/2} \ .
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Avendo usato che $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

Per le ipotesi sui coefficienti sappiamo quindi che il drift spinge all'interno dell'intervallo e per il teorema (33) nel caso in cui il processo parte da un punto del bordo entra subito all'interno dell'intervallo e q.c. non uscir 'a più da questo per quanto dimostrato nel teorema (34). Il bordo in questo caso quindi è detto naturale. Per poter applicare il teorema (34) è sufficiente verificare la condizione

$$A := \frac{a(0) + o(1)}{z \frac{d}{dz} \sigma^2(z)|_{z=0} + o(z)} \geq 1$$

Nel problema che stiamo considerando: $a(0) = 1 + \frac{d-2}{2}$ e $\sigma^2(x) \simeq x$, quindi $(\sigma^2(x))'|_{x=0} = 1$ da cui abbiamo che $A \geq 1$ se e soltanto se

$$1 + \frac{d-2}{2} \geq 1$$

e tale condizione è verificata se e soltanto se $d \geq 2$.

Inoltre poichè i coefficienti soddisfano le condizioni di esistenza ed unicità della soluzione forte del teorema (35) concludiamo che non essendoci tempo di esplosione esiste ed è unica la soluzione forte del problema.

Riferimenti bibliografici

[1] Dmitry Dolgopyat, Carlangelo Liverani, *Energy Transfer in a Fast-Slow Hamiltonian System*, Published online: 10 September 2011 Springer-Verlag 2011.

[2] I. Gihman and A. V. Skorohod, *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin, New York 1972.

[3] I. Karatzas and S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag New York, 1991 (Second edition).

[4] T.M. Liggett, *Continuous Time Markov Processes: An Introduction*, American Mathematical Society, 2010.

[5] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations. An Introduction With Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1998.

[6] A. Pascucci,*PDE and Martingale Methods in Option Pricing*, Springer-Verlag Italia, 2011.

[7] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mladinska Knjiga, McGraw-Hill, 1970.

[8] S.Salsa, *Equazioni a derivate parziali. Metodi, Modelli e Applicazioni*, Springer-Verlag Italia, 2010, (seconda edizione).

[9] D.Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, 1991.